CY Cergy-Paris université
Janvier 2023

Mathématiques-MS3, session 1
Durée 2 heures, calculatrice interdite

Questions de cours :
(1) On considère la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{4^n} x^n$, où $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$. Calculer son rayon de convergence.
(2) Etudier la nature de la série numérique $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}}{n}$.
(3) Etudier la nature de l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3} dx$.
(4) Soit $\Omega = \{(x; y) \mid 0 \leq x \leq 1, y \geq 0, y \leq 1 + x\}$. Calculer l'intégrale double $\int\int_{\Omega} (x + y) dxdy$.

Exercice 1:
Soit $f(x)$ une fonction 2π-périodique définie sur $\mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = x^2, \quad \forall x \in [-\pi; \pi].$$

(1) Tracer le graphique de f sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$, puis étudier la parité de f.
(2) Calculer les coefficients de Fourier de f.
(On remarque que $\cos(n\pi) = (-1)^n$ et $\sin(n\pi) = 0$.)
(3) En déduire les valeurs de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 2:
Soit Ω le domaine défini par $\Omega = \{(x; y) \mid x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1\}$. On considère le changement de coordonnées suivant:

$$x = r \cos\theta, \quad y = 2r \sin\theta.$$

(1) Dessiner le domaine Ω dans un plan muni d'un repère orthonormé, puis calculer le Jacobien du changement de coordonnées ci-dessus.
(2) On suppose que le nouveau domaine en coordonnées $(r; \theta)$ est

$$\Omega' = \{(r; \theta) \mid 0 \leq r \leq 1; \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

Calculer l'intégrale double $\int\int_{\Omega} (x^2 + \frac{y^2}{4})^2 dxdy$.
(3) Soit $\gamma : [0; 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ la courbe paramétrée fermée définie par

$$\gamma(t) = (\cos t; \quad 2 \sin t).$$

Justifier que la courbe γ est la frontière du domaine Ω.
(4) Calculer l'intégrale curviligne $\int_{\gamma} -y dx$. Puis en appliquant le théorème de Green-Riemann, justifier que la valeur de cette intégrale curviligne est égale à l'aire du domaine Ω. En déduire l'aire du domaine Ω.