CY Cergy paris université
Janvier 2021

Mathématiques-MS3, session 1
Durée 2 heures, les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés

Exercice 1:
(1) On considère la série entière $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!} x^n$, où $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$. Calculer son rayon de convergence.
(2) Etudier la nature de la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}}$.
(3) Etudier la nature de l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^2} dx$.
(4) Donner le développement en série entière, en 0, de la fonction $f(x) = \frac{1}{1+2x^2}$.

Exercice 2:
Soit $f(x)$ une fonction 2π-périodique définie sur $\mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = x^2, \qquad \forall x \in [-\pi; \pi].$$

(1) Tracer le graphique de f sur l'intervalle $[-3\pi; 3\pi]$ et étudier sa parité.
(2) Calculer les coefficients de Fourier de f.
(On remarque que $\cos(n\pi) = (-1)^n$.)
(3) En déduire les valeurs des séries numériques: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

Exercice 3:
Soit Ω le domaine défini par $\Omega = \{(x; y) \mid y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$. On considère le changement de coordonnées suivant:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$$

(1) Calculer le Jacobien de ce changement de coordonnées.
(2) On suppose que le nouveau domaine en coordonnées $(r; \theta)$ est

$$\Omega' = \{(r; \theta) \mid 0 \leq r \leq 1; \;\; 0 \leq \theta \leq \pi\}.$$

Calculer l'intégrale double $\int\int_\Omega e^{-x^2-y^2} dxdy$.

Exercice 4:
Soit $\gamma : [0; 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ la courbe paramétrée fermée définie par

$$\gamma(t) = (\cos t; \;\; \sin t).$$

(1) Justifier que la courbe γ est la frontière du domaine Ω de l'exercice 3 ci-dessus.
(1) Calculer l'intégrale curviligne suivante:

$$\int_\gamma (-\frac{2}{3}y + x)dx + (\frac{1}{3}x)dy.$$

(2) En appliquant le théorème de Green-Riemann, justifier que la valeur de cette intégrale curviligne est égale à l'aire du domaine Ω. En déduire l'aire du domaine Ω.