Université de Cergy-Pontoise
Janvier 2020

**Mathématiques-MS3, session 1**
**Durée 2 heures**, les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés

**Questions de cours :**
(1) On considère la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!}$, où $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$. Calculer son rayon de convergence. On remarque que $2^n x^n = (2x)^n$, en déduire l'expression de la fonction qui est la somme de cette série entière.
(2) Etudier la nature de la série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$.
(3) Etudier la nature de l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$.
(4) Soit $\Omega = \{(x; y) \mid x \geq 0, y \geq 0, y \leq 1 - x\}$. Calculer l'intégrale double $\int\int_{\Omega} (2x + y) dxdy$.

**Exercice 1:**
Soit $f(x)$ une fonction $2\pi$-périodique définie sur $\mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = x^2 + 1, \qquad \forall x \in [-\pi; \pi].$$

(1) Tracer le graphique de $f$ sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$, puis étudier la parité et la continuité de $f$.
(2) Calculer les coefficients de Fourier de $f$.
(On remarque que $\cos(n\pi) = (-1)^n$.)
(3) En déduire les valeurs de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

**Exercice 2:**
Soit $\Omega$ le domaine défini par $\Omega = \{(x; y) \mid \frac{1}{4} \leq x^2 + \frac{y^2}{9} \leq 1\}$. On considère le changement de variables:

$$x = r\cos\theta, \quad y = 3r\sin\theta.$$

(1) Soit $\gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ la courbe paramétrée définie par

$$\gamma_1(t) = (\frac{1}{2}\cos t; \ \ \frac{3}{2}\sin t);$$

Soit $\gamma_2 : [0; 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ la courbe paramétrée définie par

$$\gamma_2(t) = (\cos t; \ \ 3\sin t).$$

Justifier que $\gamma_1$ paramètre la courbe $\mathcal{C}_1$ d'équation $x^2 + \frac{y^2}{9} = \frac{1}{4}$ et que $\gamma_2$ paramètre la courbe $\mathcal{C}_2$ d'équation $x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$.

(2) Dans un plan muni d'un repère orthonormé, tracer les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. (On constate que ces deux courbes constituent la frontière du domaine $\Omega$.)
(3) Calculer le Jacobien du changement de variables ci-dessus.
(4) Déterminer le nouveau domaine $\Omega'$ en coordonnées $(r, \theta)$.
(5) En utilisant ce changement de variables, calculer l'intégrale double

$$\int\int_{\Omega} e^{-9x^2-y^2} dxdy.$$

(6) Calculer les intégrales curvilignes $I_1 = \int_{\gamma_1} xdy$ et $I_2 = \int_{\gamma_2} xdy$
(7) En utilisant le théorème de Green-Riemann, justifier que pour $i \in \{1, 2\}$, $I_i$ est égale à l'aire du domaine entouré par la courbe paramétrée $\gamma_i$. En déduire l'aire du domaine $\Omega$.