Université de Cergy-Pontoise
Juin 2018

Mathématiques-MS3, session 2
Durée 2 heures, les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés

Questions de cours :
(1) On considère la série entière $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n-1}{2n^2-n+3} x^n$. Soit R son rayon de convergence, calculer la valeur de R;
(2) Soit $f(x)$ la fonction définie par la série entière ci-dessus pour tout $x \in]-R; R[$, et soit $f'(x)$ la fonction dérivée de $f(x)$. Calculer la série entière de $f'(x)$, quel est son rayon de convergence?
(3) Calculer la valeur de l'intégrale double $\int\int_{[1;2]\times[2;3]} x\mathrm{e}^{xy} dxdy$.

Exercice 1:
On considère l'intégrale généralisée $\int_5^{+\infty} \frac{1}{x^2-2x-8} dx$.
(1) Justifier la convergence de cette intégrale généralisée.
(2) Déterminer deux constantes α et β telles que pour tout $x \in [5, +\infty[$,

$$\frac{1}{x^2-2x-8} = \frac{\alpha}{x-4} + \frac{\beta}{x+2}.$$

(3) Soit $A > 5$, calculer la valeur de l'intégrale $\int_5^A \frac{1}{x^2-2x-8} dx$. Puis en déduire la valeur de l'intégrale $\int_5^{+\infty} \frac{1}{x^2-2x-8} dx$.

Exercice 2:
Soit $f(x)$ la fonction paire 2π-périodique définie sur $\mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = 2x, \quad \forall x \in [0; \pi].$$

(1) Tracer le graphique de $f(x)$ sur l'intervalle $[-3\pi; 3\pi]$.
(2) Calculer les coefficients de Fourier de $f(x)$.
(On remarque que $\cos(n\pi) = (-1)^n$.)
(3) Enoncer la théorème de Dirichlet, puis en déduire la valeur de la série numérique $\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)^2}$.

Exercice 3:
Soient R une constante strictement positive, et Ω le domaine défini par $\Omega = \{(x; y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$. On considère le changement de coordonnées suivant:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$$

(1) Calculer le Jacobien de ce changement de coordonnées.
(2) Déterminer le domaine en $(r;\theta)$ correspondant, noté Ω'. Puis calculer l'intégrale double $\int\int_\Omega e^{-(x^2+y^2)}dxdy$.
Quelle est la limite de cette intégrale double, pour R tendant vers $+\infty$?

Exercice 4:
Soient R une constante strictement positive, et $\gamma : [0;2\pi] \to \mathbb{R}^2$ la courbe paramétrée fermée définie par

$$\gamma(t) = (R\cos t; \quad R\sin t).$$

On sait que la courbe γ est la frontière du domaine Ω dans l'exercice 3 ci-dessus.
(1) En utilisant la définition de l'intégrale curviligne, calculer $\int_\gamma xdy$.
(2) En appliquant le théorème de Green-Riemann, justifier que la valuer de cette intégrale curviligne est égale à l'aire du domaine Ω. En déduire l'aire du domaine Ω.