Université de Cergy-Pontoise
Janvier 2018

**Mathématiques-MS3, session 1**
**Durée 2 heures**, les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés

**Questions de cours :**
(1) On considère la série entière $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2n)!}x^n$, où $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$. Calculer son rayon de convergence.
(2) Etudier la nature de la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2^n}$.
(3) Etudier la nature de l'intégrale généralisée $\int_4^{+\infty} \frac{x+1}{x^3+2x-8}dx$.

**Exercice 1:**
On considère l'intégrale généralisée $\int_2^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$.
(1) St $A$ un nombre supérieur à 2. Justifier la formule suivante:

$$\int_2^A \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx = [\frac{\sin x}{\sqrt{x}}]_2^A + \frac{1}{2}\int_2^A \frac{\sin x}{(\sqrt{x})^3}dx.$$

(2) Démontrer que l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{(\sqrt{x})^3}dx$ converge. En déduire la nature de l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$.

**Exercice 2:**
Soit $f(x)$ une fonction $2\pi$-périodique définie sur $\mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = 3 \mid x \mid, \qquad \forall x \in [-\pi; \pi].$$

(1) Tracer le graphique de $f(x)$ sur l'intervalle $[-3\pi; 3\pi]$, et étudier la parité de $f(x)$.
(2) Calculer les coefficients de Fourier de $f(x)$.
(On remarque que $\cos(n\pi) = (-1)^n$.)
(3) Enoncer la théorème de Dirichlet, puis calculer la valeur de la série numérique $\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)^2}$.

**Exercice 3:**
Soit $\Omega$ le domaine défini par $\Omega = \{(x; y) \mid y \geq 0, x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1\}$. On considère le changement de coordonnées suivant:

$$x = r\cos\theta, \quad y = 2r\sin\theta.$$

(1) Calculer le Jacobien de ce changement de coordonnées.
(2) On suppose que le domaine en $(r; \theta)$ correspondant est

$$\Omega' = \{(r; \theta) \mid 0 \leq r \leq 1; \;\; 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

Calculer l'intégrale double $\int\int_\Omega e^{-x^2-\frac{y^2}{4}}dxdy$.

**Exercice 4:**
Soit $\gamma : [0; 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ la courbe paramétrée fermée définie par

$$\gamma(t) = (\cos t; \quad 2\sin t).$$

(1) Justifier que la courbe $\gamma$ est la frontière du domaine $\Omega$ dans l'exercice 3 ci-dessus.
(1) En utilisant la définition de l'intégrale curviligne, calculer

$$\int_\gamma -\frac{2}{3}ydx + (\frac{1}{3}x + y)dy.$$

(2) En appliquant le théorème de Green-Riemann, justifier que la valuer de cette intégrale curviligne est égale à l'aire du domaine $\Omega$. En déduire l'aire du domaine $\Omega$.