Université de Cergy-Pontoise
Janvier 2017

Mathématiques-MS3
Durée 2 heures, les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés

Questions de cours :
(1) Justifier que la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$ converge.
(2) On considère la série entière $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n$. Calculer son rayon de convergence.

Exercice 1:
On considère l'intégrale généralisée $\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2+x-6} dx$.
(1) Justifier la convergence de cette intégrale généralisée.
(2) Déterminer deux constantes α et β telles que pour tout $x \in [3, +\infty[$,

$$\frac{1}{x^2+x-6} = \frac{\alpha}{x+3} + \frac{\beta}{x-2}.$$

(3) Soit $A > 1$, calculer la valeur de l'intégrale $\int_3^{A} \frac{1}{x^2+x-6} dx$. Puis en déduire la valeur de l'intégrale $\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2+x-6} dx$.

Exercice 2:
Soit $f(x)$ une fonction 2π-périodique définie sur $\mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = -2x, \quad \forall x \in]-\pi; \pi].$$

(1) Tracer le graphique de $f(x)$ sur l'intervalle $[-3\pi; 3\pi]$, et étudier la parité de $f(x)$.
(2) En utilisant l'intégration par parties, calculer les coefficients de Fourier de $f(x)$.
(On remarque que $\cos(n\pi) = (-1)^n$.)
(3) Justifier la convergance de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. Puis en appliquant le théorème de Dirichlet la série de Fourier de $f(x)$, calculer la valeur de cette série numérique.

Exercice 3:
Soit Ω le domaine défini par $\Omega = \{(x; y) \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\}$. On considère le changement de coordonnées suivant:

$$x = 2r\cos\theta, \quad y = 3r\sin\theta.$$

(1) Calculer le Jacobien de ce changement de coordonnées.
(2) Soit Ω' le domaine des nouvelles coordonnées, càd que

$$(x;y) \in \Omega \quad \text{si et seulement si} \quad (r;\theta) \in \Omega'.$$

On admet que $\Omega' = \{(r;\theta) \mid 0 \leq r \leq 1;\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$. Calculer l'intégrale double $\int\int_\Omega xy^2 dxdy$.
(3) Soit $\gamma : [0;2\pi] \to \mathbb{R}^2$ la courbe paramétrée définie par

$$\gamma(t) = (2\cos t; \quad 3\sin t).$$

On admet que γ est la courbe frontière du domaine Ω. Calculer l'intégrale curviligne $\int_\gamma ydx - xdy$.
(4) En utilisant le théorème de Green-Riemann, transformer cette intégrale curviligne en une intégrale double sur Ω. Puis en déduire l'aire du domaine Ω.