Université de Cergy-Pontoise
Juin 2016

Mathématiques-MS3, session 2
Durée 2 heures, les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés

Questions de cours :
(1) Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ une série telle que $a_n > 0$. Enoncer le critère de D'Alembert.
(2) On considère la série entière $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n!} x^n$, où $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$. Calculer son rayon de convergence.

Exercice 1:
On considère l'intégrale généralisée $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2-1} dx$.
(1) Justifier la convergence de cette intégrale généralisée.
(2) Déterminer deux constantes α et β telles que pour tout $x \in [2, +\infty[$,

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x+1}.$$

(3) Soit $A > 1$, calculer la valeur de l'intégrale $\int_1^{A} \frac{1}{x^2-1} dx$. Puis en déduire la valeur de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2-1} dx$.

Exercice 2:
Soit $f(x)$ une fonction 2π-périodique définie sur $\mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = \mid x \mid, \quad \forall x \in [-\pi; \pi].$$

(1) Tracer le graphique de $f(x)$ sur l'intervalle $[-3\pi; 3\pi]$, et étudier la parité de $f(x)$.
(2) Calculer les coefficients de Fourier de $f(x)$.
(On remarque que $\cos(n\pi) = (-1)^n$.)
(3) Enoncer la théorème de Dirichlet, puis calculer la valeur de la série $\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)^2}$.

Exercice 3:
Soit Ω le domaine défini par $\Omega = \{(x; y) \mid y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$. On considère le changement de coordonnées suivant:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$$

Quel est le Jacobien de ce changement de coordonnées? Calculer l'intégrale double $\int\int_\Omega e^{-x^2-y^2} dxdy$.

Exercice 4:
Soit $\gamma : [0; 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ la courbe paramétrée fermée définie par

$$\gamma(t) = (2\cos t; \quad 4\sin t).$$

(1) En utilisant la définition de l'intégrale curviligne, calculer

$$\int_\gamma -\frac{2}{3}y dx + \frac{1}{3}x dy.$$

(2) En appliquant le théorème de Green-Riemann, justifier que la valuer de cette intégrale curviligne est égale à l'aire du domaine entouré par γ.