Deuxième Année de Licence PC-C
Probabilités
2014/2015

UNIVERSITÉ
de Cergy-Pontoise

Examen, 11 mai 2015, 3 heures

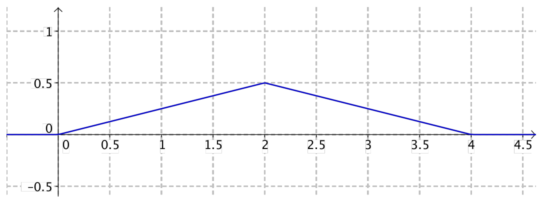
Appareils connectés interdits ou éteints. Calculatrice autorisée ainsi qu'un aide-mémoire manuscrit et personnel tenant sur une ou deux pages A4 recto-verso, qu'une table de la loi normale et le document sur les intervalles de confiance contenant le schéma des abaques

Exercice 1 : (2,5 points) Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale $\mathcal{N}(12, 4)$. calculer les probabilités suivantes : $P(X \leq 15)$, $P(X \geq 18)$, $P(X \geq 7)$, $P(X \leq 9)$, $P(8 \leq X \leq 17)$.

Exercice 2 : (3 points) Un boulanger mélange 1000 raisins dans une pâte pour fabriquer 100 brioches. On suppose que chaque raisin a une probabilité égale de se retrouver dans chacune des brioches, et ceci indépendamment des autres raisins.
On s'intéresse au nombre de raisins contenu dans une de ces brioches. Soit X ce nombre.

1. Quelle est la loi suivie par X ? Par quelle loi peut-on l'approcher (justifier) ?
2. À l'aide de la loi approchée, donner une valeur approchée de $P(8 \leq X \leq 12)$ (autrement dit la probabilité que la brioche contienne entre 8 et 12 raisins).

Exercice 3 : (6 points)
Soit X une variable aléatoire dont la densité est la fonction linéaire par morceaux dessinée ci-desous :



1. Donner les valeurs suivantes : $P(X = 2)$, $P(0 \leq X \leq 1)$, $P(1 \leq X \leq 3)$ et $E(X)$.
2. Montrer que pour tout $\alpha \in [0; 2]$ on a : $P(|X - 2| \geq \alpha) = \dfrac{(2-\alpha)^2}{4}$.
3. Soit σ l'écart-type de X. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déduire de la question précédente que $2\sigma \geq \alpha(2 - \alpha)$ pour tout $\alpha \in [0; 2]$. Prouver alors que $\sigma \geq 1/2$
4. On admet que $\sigma^2 = 2\displaystyle\int_0^2 (2-t)^2 \frac{t}{4}\, dt$. Donner alors la valeur exacte de σ et $E(X^2)$.

Exercice 4 : (6 points) Le Césium 137 est un atome radioactif dont la durée de vie est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. Sachant que le Césium 137 a une chance sur deux de disparaitre avant 30 ans, donner la valeur de λ.
2. Sachant qu'un atome de Césium 137 n'a pas disparu au bout de 30 ans, quelle est la probabilité qu'il disparaisse avant 60 ans ? Justifier.
3. On considère maintenant 10 000 atomes de Césium 137, dont on suppose que les durées de vie sont des variables aléatoires indépendantes de paramètre λ. On appelle N la variable aléatoire égale au nombre d'atomes encore présent (encore en vie) au bout de 30 ans.
   (a) Quelle loi suit N ? Quelle est son espérance, sa variance ?
   (b) Par quelle loi peut on approcher la loi de N ? Justifier.
   (c) Donner un intervalle de pari pour la valeur de N à 95% de confiance.

Exercice 5 : (4 points) Les moteurs des appareils électroménagers d'une marque M ont une durée de vie moyenne de $\mu_r = 3000$ heures avec un écart-type $\sigma_r = 150$ heures.
A la suite d'une modification dans la fabrication des moteurs, le fabricant affirme que les nouveaux moteurs ont une dure de vie moyenne supérieure à celle des anciens.
On teste la durée de vie de 50 nouveaux moteurs et on trouve $\bar{x} = 3040{,}3$ heures.
Peut-on croire, au risque de 5%, que les nouveaux moteurs ont une durée de vie supérieure ?

Exercice 1 : On pose $T = \frac{X-12}{2}$, alors T suit $N(0;1)$. $P(X \leq 15) = P(T \leq 1,5) =$.
$P(X \geq 18) = P(T \geq 3) = 1 - \phi(3) =$.
$P(X \geq 7) = P(T \geq -2,5) = P(T \leq 2,5) =$.
$P(X \leq 9) = P(T \leq --1,5) = 1 - \phi(1,5) =$.
$P(8 \leq X \leq 17) = P(-2 \leq T \leq 2,5) = \phi(2,5) - (1 - \phi(2)) =$.