Examen final
Durée : 3h

- Les calculatrices et les notes du cours sont interdits. Une seule feuille antisèche est permise.
- Dans les exercices, on pourra admettre les résultats d'une question pour faire les questions suivantes.
- Le barème est donné à titre indicatif, il est susceptible de changer.

Exercice 1

1. Déterminer des séries numériques suivantes si elles sont convergentes ou divergentes. **(2pt)**

$$a) \sum_{n=0}^{\infty} (-e)^{-n} \qquad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^2}$$
$$c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} \qquad d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\ln(n)}}$$

2. Déterminer la série entière des fonctions suivantes. (*Il ne faut pas* calculer le rayon de convergence.) **(2pt)**

$$a) \frac{1}{1+x^2} \qquad b) \frac{1}{(1+x)^2}$$
$$c) \frac{e^x-1}{x} \qquad d) \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

3. Soit $N > 0$ un nombre entier.
   (a) Déterminer la série de Fourier de la fonction 2π-périodique et paire f qui satisfait
   $$\begin{cases} f(x) = N\pi & \text{pour } 0 \le x < \pi/N \\ f(x) = 0 & \text{pour } \pi/N < x \le \pi \end{cases} \qquad \textbf{(1pt)}$$
   (b) Énoncer le théorème de Dirichlet. **(1pt)**
   (c) Déduire de $a)$ et $b)$ que
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{n\pi}{N})}{n} = \frac{N-1}{2N}\pi$$
   (1pt)

Exercice 2

1. Déterminer quelles des intégrales suivantes sont convergentes. Motiver votre réponse. **(2pt)**

$$a) \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{t}}{1+t^2}\mathrm{d}t \qquad b) \int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$$
$$c) \int_1^{\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x \qquad d) \int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\mathrm{d}x$$

2. Un étudiant conclut que
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{\sin(\frac{x}{n})}{x}\mathrm{d}x = 0$$
comme $\lim_{n\to\infty}\sin(\frac{x}{n}) = \sin(0) = 0$ pour tout $x \geq 0$. Est-ce que son résultat est correct ? Est-ce que son raisonnement est correct/complet ? Motiver votre réponse. **(2pt)**

Exercice 3

1. Calculer $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x$. **(2pt)**
2. (a) Dessiner l'ensemble $U = \{(x,y) \mid x > 0, y > 0, 1/4 < x^2+y^2 < 1\}$. **(1pt)**
   (b) Calculer $\iint_U \frac{xy}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ par une transformation de variables appropriée. **(2pt)**

Exercice 4

1. Dessiner les courbes
$$C_0 = \{(x,y) \mid x^2+y^2 = 1\}$$
et
$$C_1 = \{(x,y) \mid (x,y) \mid (x-1)^2+y^2 = \frac{1}{4}\}$$
dans le plan. En trouver des paramétrages essentiels γ_0, respectivement γ_1, tournant contre le sens des aiguilles d'une montre. **(2pt)**
2. Soit $F : \mathbb{R}^2 \setminus (0,0) \to \mathbb{R}^2$ le champ de vecteurs
$$F(x,y) = (\frac{-y}{x^2+y^2}\ ,\ \frac{x}{x^2+y^2}).$$
Calculer les intégrales curvilignes $\int_{\gamma_0} F(p)\cdot dp$ et $\int_{\gamma_1} F(p)\cdot dp$. **(2pt)**

Rappels de cours

Définition (Coefficients de Fourier)**.** *Soit f une fonction sur $\mathbb{R}$ qui est continue par morceaux et T-périodique. On appelle* coefficients de Fourier *de f les réels suivants :*

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\mathrm{d}x, \\ a_n &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos(\frac{2n\pi}{T}x)\mathrm{d}x, \qquad n \geq 1 \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin(\frac{2n\pi}{T}x)\mathrm{d}x, \qquad n \geq 1. \end{aligned}$$

Théorème (Théorème de Green-Riemann)**.** *Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ un lacet simple, continue et de classe C^1 par morceaux, qui se tourne contre le sens des aiguilles d'une montre. Soit Ω_γ la région bornée par γ. Soit $F(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y))$ un champ de vecteurs de classe C^1 sur un domaine ouvert qui contient Ω_γ ainsi que l'image de γ. Alors*
$$\int_\gamma F(p)\cdot\mathrm{d}p = \iint_{\Omega_\gamma} (\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$