Contrôle continu
Séries et Intégrales généralisées
Durée : 2h

1. Les calculatrices et les notes du cours sont interdits
2. Dans les exercices, on pourra admettre les résultats d'une question pour faire les questions suivantes.
3. Le barême est donné à titre indicatif, il est susceptible de changer.

Exercice 1 On considère la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to |\cos(\frac{x}{2})|.$$

1) Dessiner le graphe de f. Quelle est la période minimale de f ? **(2pt)**
2) Calculer les coefficients de Fourier de f par rapport à la période 2π. **(3pt)**
3) Énoncer le théorème de Dirichlet dans le point $x = 0$, et en déduire la somme de la série
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2}.$$
(3pt)
4) En déduire une autre preuve que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$, en admettant que la série à gauche est convergente. (Suggestion : faire une décomposition en éléments simples de $\frac{1}{1-4n^2}$, et simplifier.) **(2pt)**

Exercice 2 On considère la fonction

$$f :]0, +\infty[\to \mathbb{R} : t \to \frac{\ln(t)}{t^2}.$$

1) Montrer que $\int_0^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ diverge, pendant que $\int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ converge. **(2pt)**
2) Calculer $\int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$. **(2pt)**

Exercice 3 Soit (a_n) la suite de Fibonacci, donnée par la formule de récurrence

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \qquad n \geq 0$$

et valeurs initiales $a_0 = a_1 = 1$.

1) En admettant que la suite $(\frac{a_{n+1}}{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge, calculer sa limite. En déduire le rayon de convergence R de la série entière
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$
(3pt)
2) Montrer que $(1 - z - z^2)f(z) = 1$ comme séries entières. **(3pt)**
3) De la deuxième partie, on obtient que $f(z) = \frac{1}{1-z-z^2}$ pour $|z| < R$. En déduire une formule pour les a_n directement en terme de n. (Suggestion : décomposer $\frac{1}{1-z-z^2}$ en éléments simples.) **(2pt)**