Examen final
Durée : 3h

- Les calculatrices et les notes du cours sont interdits. Une seule feuille antisèche est permise.
- Dans les exercices, on pourra admettre les résultats d'une question pour faire les questions suivantes.
- Le barême est donné à titre indicatif, il est susceptible de changer.

Exercice 1 Soit
$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq y^2, y \geq x^2\}.$$

1. Dessiner Ω. **(1pt)**
2. Calculer l'intégrale double
$$\iint\limits_{\Omega} xy \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
de 3 manières :
   (a) En voyant Ω comme borné par deux graphes de fonctions. **(1pt)**
   (b) En utilisant un changement de variables par la fonction
   $$G : [0,1] \times [0,1] \to \Omega : (u,v) \to (uv^2, u^2v).$$
   Vérifier que les hypothèses pour la formule de changement de variables sont satisfaites. **(3pt)**
   (c) En vérifiant que
   $$xy = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$$
   où
   $$F(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y)) = (-\frac{y^2x}{4}, \frac{x^2y}{4}),$$
   et en utilisant le théorème de Green-Riemann.**(3pt)**

Exercice 2

1. Soit
$$F(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t} \mathrm{d}t.$$
Montrer que l'intégrale ci-dessus est convergente pour tout $x > 0$. **(2pt)**
2. Interprétons l'expression ci-dessus comme fonction
$$F :]0,+\infty[\to \mathbb{R} : x \to F(x).$$
Pour $0 < c < 1$, vérifier les hypothèses du théorème 'dérivation sous le signe d'intégration' pour la restriction de F à $]c,+\infty[$.
En déduire que la fonction F est dérivable sur $]0,+\infty[$, avec $F'(x) = \frac{1}{x}$ pour $x > 0$. **(2pt)**
3. En déduire que
$$F(x) = \ln(x), \qquad \text{pour } x > 0.$$
(1pt)
4. Déterminer
$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t} \mathrm{d}t$$
pour $\alpha, \beta > 0$.**(1pt)**

Exercice 3

1. Calculer le rayon de convergence de la série entière
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(\frac{\pi}{2} - \arctan(n))z^n.$$
Déterminer alors la convergence ou divergence des séries suivantes :
$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}(\frac{\pi}{2} - \arctan(n)), \qquad \text{et} \qquad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan(n)}{n2^n}.$$
(2pt)

2. Montrer que
$$\int_1^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} \mathrm{d}x$$
est une intégrale convergente. En déduire que
$$\int_1^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^2+1} \mathrm{d}x$$
est une intégrale convergente. **(2pt)**

3. En utilisant la comparaison série-intégrale, montrer que la série numérique
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(\frac{\pi}{2} - \arctan(n))$$
est convergente.**(2pt)**

Rappels de cours

Rayon de convergence R d'une série entière : pour la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, on a que, si la limite existe, le rayon de convergence est donné par $R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$.

Dériver sous le signe d'intégration :

Théorème 0.1. *Soient $a < b$ et $c < d$ nombres réels ou $\pm\infty$. Supposons donnée une fonction continue*

$$f :]a,b[\times]c,d[\to \mathbb{R} : (t,x) \to f(t,x),$$

telle que les hypothèses suivantes sont satisfaites :

- *Pour tout $x \in]c,d[$, la fonction*

$$f_x :]a,b[\to \mathbb{R} : t \to f(t,x)$$

  admet une intégrale impropre sur $]a,b[$.
- *La fonction*

$$\frac{\partial f}{\partial x} :]a,b[\times]c,d[\to \mathbb{R}$$

  existe et est continue.
- *Il existe une fonction positive et continue par morceaux $h :]a,b[\to \mathbb{R}$ qui admet une intégrale impropre sur $]a,b[$ et telle que*

$$|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)| \leq |h(t)| \qquad \textit{pour tout } t \in]a,b[, x \in]c,d[.$$

Alors si nous définissons

$$F :]c,d[\to \mathbb{R} : F(x) = \int_a^b f(t,x)\mathrm{d}t,$$

on a que F est dérivable avec

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\mathrm{d}t.$$

Théorème 0.2 (Théorème de Green-Riemann)**.** *Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ un lacet simple, continue et de classe C^1 par morceaux, qui se tourne contre le sens des aiguilles d'une montre. Soit Ω_γ la région bornée par γ. Soit F un champ de vecteurs de classe C^1 sur un domaine ouvert qui contient Ω_γ ainsi que l'image de γ. Alors*

$$\int_\gamma F(\mathbf{x}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{x} = \iint_{\Omega_\gamma} (\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$