Premier contrôle continu de mathématiques
Durée 1h00

Les calculatrices et les documents sont interdits
(Le barême est donné à titre indicatif, il est susceptible de changer).

Exercice 1 :(5pts)

On considère la série numérique de terme général $u_n = \dfrac{6}{n^2 - n - 2}$, $n \geq 3$.
1) En utilisant un critère de comparaison, montrer que cette série converge.
2) On se propose de calculer sa somme.
a) Trouver α tel que pour tout $n \geq 3$, $u_n = \dfrac{\alpha}{n-2} - \dfrac{\alpha}{n+1}$.
b) En déduire que pour tout $N \geq 4$,

$$\sum_{k=3}^{N} u_k = \sum_{k=1}^{N-2} \frac{\alpha}{k} - \sum_{k=4}^{N+1} \frac{\alpha}{k}.$$

c) En déduire la somme de cette série.

Exercice 2 :(5pts)

On considére la série entière de terme général $a_n = \dfrac{3n^2+1}{2^n}$.
1) Enoncer le critère de d'Alembert pour les séries entières.
2) En appliquant ce critère, calculer le rayon de convergence de cette série entière.

Exercice 3 :(10pts)

Soit f la fonction 2π-périodique vérifiant :

$$f(x) = \pi - x, \forall x \in]0, 2\pi[.$$

et $f(0) = 0$.
1) Dessiner la fonction f sur $[-3\pi, 3\pi]$.
2) Rappeler les formules donnant les coefficients de Fourier d'une fonction 2π-périodique.
3) Calculer les coefficients de Fourier de f.
4) En utilisant le théorème de Dirichlet en $\dfrac{\pi}{2}$, calculer la somme de la série suivante :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

5) En utilisant la formule de Parseval retrouver la somme de la série suivante :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Deuxième contrôle continu de mathématiques
Durée 1h00

Les calculatrices et les documents sont interdits
(Le barême est donné à titre indicatif, il est susceptible de changer).

Question de cours (3pts)

Enoncer le théorème de convergence dominé.

Exercice 1 :(10pts)

On souhaite étudier la fonction définie par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{\sqrt{t} + |x|t^2} dt.$$

1)(5pts) Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé.
a) L'intégrale $F(x)$ est-elle convergente si $x = 0$?
b) Montrer que pour tout $k > 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t} + kt^2} dt$ est une intégrale convergente.
c) En déduire que si $x \neq 0$, $F(x)$ est un intégrale convergente.
d) En déduire le domaine de définition de F.
2)(5pts) On se propose d'étudier la continuité de F.
a) Enoncer la propriété donnant la continuité d'une intégrale généralisée dépendant d'un paramètre.
b) Soit $\varepsilon > 0$, montrer que pour tout $x \in]-\infty, -\varepsilon[\cup]\varepsilon, +\infty[$, et pour tout $t \in \mathbb{R}$ $\left| \dfrac{\cos(xt)}{\sqrt{t} + xt^2} \right| \leq \dfrac{1}{\sqrt{t} + \varepsilon t^2}$. En déduire F est continue sur son domaine de définition.

Exercice 2 :(7pts)

On considére l'intégrale double

$$I = \iint_\Omega x + y - 3 \; dxdy,$$

où $\Omega = \left\{ (x, y), 0 \leq y \leq 2, \dfrac{(x-2)^2}{4} - (y-1)^2 \leq 1 \right\}$.
(On ne cherchera pas à dessiner le domaine Ω).

1)(3pts) Rappeler le théorème de Fubini.
2)(1pt) Trouver deux fonctions ψ_1 et ψ_2 telles que :

$$\Omega = \{(x, y), 0 \leq y \leq 2, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}.$$

3)(1,5pt) En appliquant Fubini, en déduire qu'il existe une constante k telle que

$$I = k \int_0^2 (y-1)\sqrt{1 + (y-1)^2} dy.$$

(On pourra noter que $x + y - 3 = (x - 2) + (y - 1)$.)
5)(1,5pt) Calculer I.