Université de Cergy-Pontoise **2010-2011**
S3 PC/C/STE

Examen de mathématiques
Première session
Durée 3h00

Les calculatrices sont interdites
Un résumé de cours manuscrit en bleu sur une feuille blanche de format A4 en recto-verso est autorisé.

Dans les exercices et le problème, on pourra admettre les résultats d'une question pour faire les questions suivantes.
(Le barême est donné à titre indicatif, il est susceptible de changer).

Exercice 1 :(5pts)

On considère la fonction π-**périodique** f définie par

$$\forall x \in [0, \pi], f(x) = \sin(x).$$

1) Dessiner la courbe représentative de f sur $[-2\pi; 2\pi]$.
2) Calculer les coefficients de Fourier de f. On vérifiera qu'il existe deux constantes k_1 et k_2 (dont l'une est nulle) telles que

$$\forall n > 0, a_n = \frac{k_1}{4n^2 - 1}, b_n = \frac{k_2}{4n^2 - 1}.$$

Indication : On pourra utiliser la formule de trigonométrie suivante
$\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$.

3) En utilisant la série de Fourier associée à f, calculer la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$.

4) On souhaite calculer la valeur de $S = \sum_{=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{16k^2 - 1}$.

a) Exprimer $\cos(n\frac{\pi}{2})$ en fonction n (on pourra séparer les cas où n est paire ou impaire).

b) En utilisant la série de Fourier de f calculée en $x = \frac{\pi}{4}$, calculer la somme de la série numérique S.

Exercice 2 :(5pts)

On définit la suite de fonctions (φ_n) telle que pour tout $t \in]0, +\infty[$:

$$f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{t + t^n}}.$$

On souhaite étudier les intégrales généralisées suivantes

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x + x^n}} dx.$$

1) Montrer que les intégrales I_n sont convergentes si $n \geq 3$.
2) Soit $x \in]0, +\infty[$ un réel fixé.

a) Montrer $(f_n(x))_{n\geq 3}$ converge (on distinguera 3 cas , $x<1$, $x=1$ et $x>1$).

b) En déduire que la suite de fonction (f_n) converge simplement vers une fonction f que l'on précisera.

c) Montrer que pour tout $x\in]0,1[$ et $n\geq 3$, $f_n(x)\leq \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

d) Montrer que pour tout $x\in]1,+\infty[$ et $n\geq 3$, $f_n(x)\leq \dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$.

3) En déduire que la suite $(I_n)_{n\geq 3}$ converge vers une limite que l'on précisera.

Exercice 3 :(5pts)

Soit $\Omega=\left\{(u,v), -1\leq v\leq 1, \dfrac{u^2}{4}-v^2\leq 1\right\}$.

On souhaite calculer

$$A=\iint_\Omega \frac{u^2}{\sqrt{1+v^2}}\,du\,dv.$$

Soit $R=[-2;2]\times[-1;1]$.

1) Montrer que $F:R\to\Omega$ telle que $F(x,y)=(x\sqrt{1+y^2},y)$ est une bijection puis calculer le jacobien de F.

2) En utilisant la formule de changement de variables appliquée à F, montrer qu'il existe une constante k telle que

$$A=k\iint_R x^2(1+y^2)\,dx\,dy.$$

3) Calculer A.

Exercice 4 :(5pts)

Soient Γ_0 le morceau d'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ avec $x,y\geq 0$ joignant les points $A=(2,0)$ et $B=(0,1)$ et $\Gamma_1=[B;A]$ le segment joignant B à A. On considère le champ de force suivant

$$F(x,y)=\begin{pmatrix}\dfrac{x+y}{x^2+4y^2}\\ \\ x^2y\end{pmatrix}$$

On souhaite calculer J le travail de F sur le chemin fermé constitué de $\Gamma_0\cup\Gamma_1$ parcouru dans le sens trigonométrique.

1) Dessiner sur une même figure Γ_0 et Γ_1.

2) En choisissant une paramétrisation de Γ_0, calculer $J_0=\displaystyle\int_{\Gamma_0}F(x,y).d\vec{\sigma}$.

3) En choisissant une paramétrisation de Γ_1, calculer $J_1=\displaystyle\int_{\Gamma_1}F(x,y).d\vec{\sigma}$.

4) En déduire J.