Université de Cergy-Pontoise **2008-2009**
S3 PC/C/STE

Deuxième contrôle continu de mathématiques
Corrigé

Question de cours (3,5pts):

Le théorème de convergence dominé est le théorème permettant de passer à la limite sous une intégrale dans le cas d'une suite de fonctions.

Soit $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$, et $I =]a, b[$. On se donne une suite de fonctions f_n continues par morceaux sur tout segment de I telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_a^b f_n(t)dt \text{ est une intégrale convergente.}$$

On suppose que (f_n) converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur tout segment de I. Si de plus il existe une fonction g telle que

$$\forall t \in I, \forall n \in \mathbb{N} |f_n(t)| \leq g(t) \text{ et } \int_a^b g(t)dt \text{ est convergente,}$$

alors $\mathcal{I} = \displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est convergente et la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathcal{I}$.

Exercice 1 : Intégrales dépendant d'un paramètre.(9pts)

On souhaite étudier la fonction définie par:

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2+y^2} dy$$

1)(2pts) On remarque que si $x = 0$ alors pour tout $y \in]0, +\infty[$ $\dfrac{x}{x^2+y^2} = 0$, donc $F(0) = 0$ est bien définie.
Si $x \neq 0$ (x est fixé), alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2+y^2} dy$ est une intégrale généralisée au voisinage de $+\infty$. $\dfrac{x}{x^2+y^2} \sim \dfrac{x}{y^2}$ au voisinage de $+\infty$ (c'est y qui tend vers $+\infty$). Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{y^2} dy$ est convergente (intégrale de Riemann de référence, attention $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{y^2} dy$ par contre est divergente). Donc par les critères de comparaison $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2+y^2} dy$ est convergente.

2)(4pts) Soient $0 < \varepsilon < A$, deux réels fixés.
a) Par rapport au cours ici le paramètre est $x \in]-A, -\varepsilon[\cup]\varepsilon, A[$, et on intègre par rapport à $y \in]0, +\infty[$.

Pour tout $x \in]-A, -\varepsilon[\cup]\varepsilon, A[$ fixé, $y \mapsto \dfrac{x}{x^2+y^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$(donc continue par morceaux sur tout segment).
Pour tout $y \in]0, +\infty[$, $x \mapsto \dfrac{x}{x^2+y^2}$ est continue sur $]-A, -\varepsilon[\cup]\varepsilon, A[$.
Pour tout $x \in]-A, -\varepsilon[\cup]\varepsilon, A[$ et $y \in]0, +\infty[$, on constate que $\left|\dfrac{x}{x^2+y^2}\right| \leq \dfrac{A}{\varepsilon^2+y^2}$, or de

même que pour la question précédente on montre que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{A}{\varepsilon^2+y^2}dy$ est convergente. Par le théorème de continuité des intégrales généralisées dépendant d'un paramètre, on en déduit que F est continue sur $]-A,-\varepsilon[\cup]\varepsilon,A[$.

b) Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^*$, on peut choisir $0 < \varepsilon < A$ tels que $x_0 \in]-A,-\varepsilon[\cup]\varepsilon,A[$ (par exemple $\varepsilon = \frac{|x_0|}{2}$ et $A = 2|x_0|$), et donc F est continue en x_0. On vient de montrer que F est continue en tout point de $\mathbb{R}^*$.

3) (3pts) Soit $x > 0$ un réel fixé.

a) En utilisant le changement de variable $u = \frac{y}{x}$ (attention x est fixé, les variables sont y et u), on obtient immédiatement,

$$\begin{aligned}\int_0^A \frac{x}{x^2+y^2}dy &= \int_0^{\frac{A}{x}} \frac{x}{x^2+x^2u^2}xdu,\\ &= \int_0^{\frac{A}{x}} \frac{1}{1+u^2}du,\\ &= \text{Arctg}\left(\frac{A}{x}\right).\end{aligned}$$

b) Par définition des intégrales généralisées, on a $F(x) = \lim_{A\to+\infty} \text{Arctg}\left(\frac{A}{x}\right)$. Donc pour tout $x > 0$ on obtient $F(x) = \frac{\pi}{2}$ (car $\lim_{A\to+\infty} \frac{A}{x} = +\infty$ et $\lim_{X\to+\infty} \text{Arctg}(X) = \frac{\pi}{2}$).

<u>Remarques</u>: Avec le résultat de la question 3)a) on montre de même que pour tout $x < 0$, $F(x) = -\frac{\pi}{2}$ (car $\lim_{A\to+\infty} \frac{A}{x} = -\infty$ et $\lim_{X\to-\infty} \text{Arctg}(X) = -\frac{\pi}{2}$).

On a remarqué à la question 1) que $F(0) = 0$, la fonction F n'est donc pas continue en 0.

Exercice 2 : Intégrale double. (8pts)

On souhaite calculer l'intégrale suivante

$$J = \iint_\Omega uvdudv$$

où $\Omega = \{(u,v), u,v \geq 0, \frac{1}{2} \leq \sqrt{u}+v \leq 1\}$.

Pour tout $(x,y) \in [\frac{1}{2},1]\times[0,1]$, on pose $u(x,y) = (xy)^2$ et $v(x,y) = x(1-y)$ et on note $F(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$.

1) (2pts) Pour tout $(x,y) \in [\frac{1}{2},1]\times[0,1]$, on remarque aisément que $xy \geq 0$ et $(1-y) \geq 0$, on en déduit que

$$u(x,y) \geq 0,$$
$$v(x,y) \geq 0,$$
$$\sqrt{u(x,y)} + v(x,y) = x \in [\frac{1}{2},1]$$

et donc $F(x,y) \in \Omega$ (il est important de signaler que $xy \geq 0$ pour pouvoir écrire que $\sqrt{(xy)^2} = xy$).

Si (x,y) et (x',y') dans $[\frac{1}{2},1]\times[0,1]$ vérifie que $F(x,y) = F(x',y')$ alors on a d'une part $(xy)^2 = (x'y')^2$ et donc par positivité $xy = x'y'$ et d'autre part $x - xy = x' - x'y'$. On en déduit immédiatement que $x = x'$ et comme $x \neq 0$ on a bien $y = y'$. F est donc injective.

Dans la suite on note $\Omega' = [\frac{1}{2}, 1] \times [0, 1]$ et on admet que F est une bijection de Ω' dans Ω.
2) (2,5pts) Par définition on trouve,

$$J_F(x, y) = \begin{vmatrix} 2xy^2 & 2x^2y \\ (1-y) & -x \end{vmatrix} = -2x^2y.$$

3) (1pt) On remarque que pour $y = 0$ le jacobien s'annule, on n'a donc pas le droit d'utiliser la formule de changement de variables. (On peut cependant justifier celui-ci en dépassant le cadre de ce cours, ce qui explique la suite de l'exercice).
4) (2pts) En admettant que l'on ait le droit d'appliquer la formule de changement de variables, on obtient en faisant le changement de variable proposé :

$$\begin{aligned} J &= \iint_{\Omega'} u(x, y).v(xy).|J_F(x, y)|dxdy, \\ &= \iint_{\Omega'} (xy)^2.x(1-y).|-2x^2y|dxdy, \\ &= 2\iint_{\Omega'} x^5y^3(1-y)dxdy. \end{aligned}$$

On obtient bien la formule souhaitée avec $k = 2$.
5) (2,5pts) Dans notre dernière expression de J, nous reconnaissons une intégrale double sur un rectangle $[\frac{1}{2}, 1] \times [0, 1]$ du produit de deux fonctions $x \mapsto x^5$ et $y \mapsto y^3(1-y)$. On est donc dans le cas particulier de Fubini et on en déduit immédiatement que

$$\begin{aligned} J &= 2\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^5 dx. \int_0^1 y^3(1-y)dy, \\ &= 2\left[\frac{x^6}{6}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} . \left[\frac{y^4}{4} - \frac{y^5}{5}\right]_0^1, \\ &= 2.\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{384}\right) . \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right), \\ &= \frac{63}{3840} \end{aligned}$$