Université de Cergy-Pontoise **2008-2009**
S3 PC/C/STE

Voici le sujets des deux contrôles posés en 2008-2009.

Premier contrôle continu de mathématiques

Durée 1h00

Les calculatrices et les documents sont interdits
(Le barême est donné à titre indicatif, il est susceptible de changer).

Exercice 1 :(5pts)

On considère la série numérique de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^2-4}$, $n \geq 3$.
1) En utilisant un critère de comparaison, montrer que cette série converge.
2) On se propose de calculer sa somme.
a) Trouver α tel que pour tout $n \geq 3$, $u_n = \dfrac{\alpha}{n-2} - \dfrac{\alpha}{n+2}$.
b) En déduire que pour tout $N \geq 5$,

$$\sum_{k=3}^{N} u_k = \sum_{k=1}^{N-2} \frac{\alpha}{k} - \sum_{k=5}^{N+2} \frac{\alpha}{k}.$$

c) En déduire la somme de cette série.

Exercice 2 :(5pts)

On considére la série entière de terme général $a_n = \dfrac{n!}{3^{n^2}}$.
1) Enoncer le critère de d'Alembert pour les séries entières.
2) En appliquant ce critère, calculer le rayon de convergence de cette série entière.

Exercice 3 :(10pts)

Soit f la fonction 2π-périodique vérifiant :

$$f(x) = |x - \pi|, \forall x \in [0, 2\pi[,$$

1) Dessiner la fonction f sur $[-4\pi, 4\pi]$.
2) Rappeler les formules donnant les coefficients de Fourier d'une fonction 2π-périodique.
3) Calculer les coefficients de Fourier de f.
4) En utilisant le théorème de Dirichlet, calculer la somme de la série suivante :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

5) En utilisant la formule de Parseval calculer la somme de la série suivante :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}.$$

Deuxième contrôle continu de mathématiques
Durée 1h00

Les calculatrices et les documents sont interdits

(Le barême est donné à titre indicatif, il est susceptible de changer).

Question de cours (3pts) :

Enoncer le théorème de convergence dominé.

Exercice 1 : Intégrales dépendant d'un paramètre.(9pts)

On souhaite étudier la fonction définie par :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2+y^2} dy$$

1)(2pts) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2+y^2} dy$ est bien convergente.

2)(4pts) Soient $0 < \varepsilon < A$, deux réels fixés.

a) Montrer que F est continue sur $]\varepsilon, A[$ et sur $]-A, -\varepsilon[$. (On se contentera de vérifier les hypothèses sans énoncer explicitement le théorème).

b) En déduire que F est continue sur $\mathbb{R}^*$.

3) (3pts) Soit $x > 0$ un réel fixé.

a) En utilisant le changement de variable $u = \frac{y}{x}$, exprimer en fonction de $A > 0$ et x,

$$\int_0^A \frac{x}{x^2+y^2} dy.$$

b) En déduire une expression explicite de $F(x)$ pour $x > 0$.

Exercice 2 : Intégrale double. (8pts)

On souhaite calculer l'intégrale suivante

$$J = \iint_\Omega uv du dv$$

où $\Omega = \{(u,v), u,v \geq 0, \frac{1}{2} \leq \sqrt{u} + v \leq 1\}$.

Pour tout $(x,y) \in [\frac{1}{2}, 1] \times [0,1]$, on pose $u(x,y) = (xy)^2$ et $v(x,y) = x(1-y)$ et on note $F(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$.

1) (1pt) Vérifier que F est à valeurs dans le domaine Ω puis que F est injective.

Dans la suite on note $\Omega' = [\frac{1}{2}, 1] \times [0,1]$ et on admet que F est une bijection de Ω' dans Ω.

2) (2pts) Calculer le jacobien de F.

3) (1pt) A-t-on le droit d'appliquer la formule de changement de variables à F ?

4) (2pts) En admettant que l'on ait le droit d'appliquer la formule de changement de variables, montrer qu'il existe une constante k telle que :

$$J = k \iint_{\Omega'} x^3(1-x)y^5 dxdy.$$

5) (2pts) En utilisant Fubini dans l'expression précédente, calculer J.