Université de Cergy-Pontoise **2008-2009**
S3 PC/C/STE

Examen de mathématiques
Deuxième session
Durée 2h00

Un résumé de cours manuscrit en bleu sur une feuille de papier format A4 en recto-verso est autorisé.
Calculatrices et tout autre document sont interdits.

Dans les exercices et le problème on pourra admettre les résultats d'une question pour faire les questions suivantes.
(Le barême est donné à titre indicatif, il est susceptible de changer).

Exercice 1 : Séries entières (5pts)

On considère la série entière suivante :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n+1)!}.$$

1) Calculer le rayon de convergence de cette série. On note alors $\mathcal{D}_f$ le domaine de définition de f.
2) On définit pour tout x tel que $x^2 \in \mathcal{D}_f$,

$$s(x) = xf(-x^2).$$

a) Donner le domaine de définition de s.
b) Montrer que s est une série entière dont vous préciserez le terme général et le rayon de convergence.
c) Préciser l'ensemble des points x où s est C^∞.
d) Calculer $s''(x)$ (sous forme de série entière). En déduire une expression simple de $s(x) + s''(x)$.

Exercice 2 : Intégrale généralisée (6pts)

On souhaite étudier quand elle est définie

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt^2)}{t} dt.$$

1) Pour $x = 0$, $F(0)$ est-elle définie ?
2) Pour $x \neq 0$ fixé, on introduit

$$G_A(x) = \int_1^A \frac{sin(xt^2)}{t} dt.$$

a) En faisant une intégration par partie montrer qu'il existe deux constantes a et b telles que

$$G_A(x) = a\left(\frac{\cos x}{x} - \frac{\cos(xA^2)}{xA^2}\right) + b\int_1^A \frac{\cos(xt^2)}{xt^3} dt.$$

(On pourra noter que $\dfrac{\sin(xt^2)}{t} = \big(2xt\sin(xt^2)\big)\dfrac{1}{2xt^2}$.)

b) En faisant tendre A vers $+\infty$, en déduire que l'intégrale $G(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(xt^2)}{t}dt$ est convergente (on en proposera une autre expression).

c) En déduire que l'intégrale $F(x)$ est convergente.

3) Soient $K > 1$. Montrer que F est continue en tout point x tel que $\frac{1}{K} < |x| < K$.(on pourra écrire F en fonction de l'autre expression de G et utiliser que $|\sin u| \leq |u|$).

Problème : Intégrales curvilignes et intégrales multiples (9pts)

On considère les deux courbes suivantes

$$\Gamma_1 = \{(x,y), (x-1)^2 + \frac{y^2}{4} = 1\},$$
$$\Gamma_2 = \{(x,y), (x-1)^2 + \frac{y^2}{4} = 4\},$$

On note Γ_1^+ et Γ_2^+ ces courbes parcourues dans le sens trigonométrique. On souhaite calculer la travail de la force suivante le long de ces deux courbes :

$$\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{-y}{4(x-1)^2+y^2} \\ \\ \dfrac{(x-1)}{4(x-1)^2+y^2} + x^2 - 2x + \dfrac{y^2}{4} \end{pmatrix}$$

1) Rappeler la nature de Γ_1 et Γ_2.

2) Donner un paramètrage de Γ_1. En déduire le travail de $\vec{F}$ le long de Γ_1^+.

On définit le domaine suivant

$$\Omega = \{(x,y), 1 \leq (x-1)^2 + \frac{y^2}{4} \leq 4\}.$$

3) Dessiner sur une même figure Ω, Γ_1 et Γ_2.

4) En utilisant Green-Riemann montrer que

$$\int_{\Gamma_2^+} \vec{F}.d\vec{\sigma} = \int_{\Gamma_1^+} \vec{F}.d\vec{\sigma} + \iint_\Omega 2(x-1)dxdy$$

5) On se propose de faire le changement de variables $(x,y) = (1 + r\cos t, 2r\sin t)$ avec $(r,t) \in [1,2] \times [0, 2\pi]$.

a) Montrer que l'application précédente est à valeurs Ω.

b) Calculer le jacobien de cette application.

c) En admettant que l'on puisse appliquer la formule de changement de variables, montrer qu'il existe une constante k telle que

$$\iint_\Omega 2(x-1)dxdy = k \iint_{[1,2]\times[0,2\pi]} r^2 \cos t drdt$$

6) Calculer le travail de $\vec{F}$ le long de Γ_2^+.

Rappels de cours :

1 Intégrales généralisées

Définition 1.1 *Soit $I =]a, b[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction définie sur I continue par morceaux sur tout segment de I. Si il existe $c \in I$ tel que $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ sont convergentes alors on dit que $\int_a^b f(t)dt$ est convergente et on pose*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

Sinon on dit que l'intégrale diverge.

Proposition 1.2 *Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction de deux variables à valeurs réelles définie sur $J \times I$, vérifiant*
- *pour tout $x \in J$ fixé, $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur tout segment de I,*
- *pour tout $t \in I$ fixé, $x \mapsto f(x, t)$ est coninue sur J,*
- *il existe une fonction h définie sur I, continue sur I, telle que*

$$-\forall (x, t) \in J \times I, |f(x, t)| \leq h(t),$$

$$-\int_a^b h(t)dt \text{ est une intégrale convergente.}$$

Alors la fonction définie par

$$F(x) = \int_a^b f(x, t)dt,$$

est continue sur J.

2 Séries entières

Définition 2.1 *Soit (a_n) une suite rï£¡elle et $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sa sï£¡rie entiï£¡re associï£¡e. On appelle rayon de convergence de la sï£¡rie la borne sup de l'ensemble suivant $\{x \geq 0, (a_n x^n)$ est bornï£¡e$\}$. On le note R, si $R = \infty$ on dit que le rayon est infini, si $R \in \mathbb{R}^*$ alors par dï£¡finition on vï£¡rifie :*

si $|x| < R$ alors la suite $(a_n x^n)$ est bornée
si $|x| > R$ alors la suite $(a_n x^n)$ n'est pas bornée.

3 Intégrales doubles

Théorème 3.1 *(***Formule de Fubini***)*
On considère deux fonctions φ_1 et φ_2 à valeurs réelles, définies et continues sur un même intervalle $[a, b]$ telles que

$$\forall t \in [a, b], \varphi_1(t) \leq \varphi_2(t).$$

On considère le domaine

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}.$$

Alors le domaine Ω est un fermé régulier et pour toute fonction f intégrable sur Ω on vérifie

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx.$$

Théorème 3.2 *(***Formule de changement de variables***)*
Soit Ω un ensemble fermé, borné, régulier du plan. Soit F une fonction définie de Ω dans Ω_1 bijective et de classe C^1. On suppose que pour tout $(x,y) \in \Omega$ $J_F(x,y) \neq 0$. On vérifie alors

$$\iint_\Omega f\big(F(x,y)\big)\big|J_F(x,y)\big|dxdy = \iint_{\Omega_1} f(u,v)dudv.$$

Une formule de changement de variables en coordonnées polaire :

$$\iint_{B(O,R)} f(x,y)dxdy = \iint_{[0,R]\times[0,2\pi]} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))rdrd\theta.$$

4 Intégrales curvilignes

Soit $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$ un champ de vecteur.

Soit Γ une courbe joignant les points A et B. Si $(x(t), y(t))$ est un paramètrage de Γ sur le segment $[a,b]$ tel que $A = (x(a), y(a))$ et $B = (x(b), y(b))$ alors on appelle travail de la force $\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ le long de Γ de A à B le réel suivant

$$I = \int_\Gamma \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix} .d\vec{\sigma} = \int_a^b (P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t))dt.$$

Théorème 4.1 *(***Formule de Green-Riemann***)*
Soit Ω un ouvert borné régulier. Soit Γ son bord que l'on suppose sans point double. On note Γ^+ ce bord parcouru dans le sens positif. Alors si $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$ est un champ de vecteur de classe C^1

$$\int_{\Gamma^+} \vec{F}(x,y).d\vec{\sigma} = \iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$