Université de Cergy-Pontoise **2007-2008**
S3 PC/C/STE

Examen de mathématiques
Deuxième session
Durée 2h00

Les calculatrices et les documents sont interdits

Dans les exercices et le problème, on pourra admettre les résultats d'une question pour faire les questions suivantes.
(Le barême est donné à titre indicatif, il est susceptible de changer).

Exercice 1 : Séries de Fourier (5pts)

On considère la fonction 2π-périodique f définie par

$$\forall x \in [-\pi, 0[, f(x) = 0,$$
$$\forall x \in [0, \pi[, f(x) = 1.$$

1)(3pts) Calculer les coefficients de Fourier de f.

2)(2pts) En utilisant Parseval, retrouver la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Exercice 2 : Séries entières (5pts)

On s'intéresse aux deux séries entières suivantes :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{x^n}{2^n}.$$

1) (2pts) Calculer les rayons de convergence respectifs de f et g.

2) (1pt) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{(n+1)}{2^n} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{(n-k)}.$$

3) (2pts) En déduire une relation entre f et g.

Exercice 3 : Intégrales généralisées (4pts)

On souhaite étudier quand elle existe la fonction définie par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)dt \text{ où } f(x,t) = \frac{e^{\frac{-x}{t}}}{1+t^2}.$$

1) (2pts) Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$, $F(x)$ est une intégrale convergente.
2) (2pts) Montrer que F est continue sur $[0, +\infty[$.

Exercice 4 : Intégrales doubles (6pts)

On considère le domaine suivant :

$$\Omega = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \sin(2\pi x) \leq y \leq 4(1-x^2)\big\}.$$

1) (2pts) Dessiner Ω.

On note Γ^+ le bord de Ω parcouru dans le sens positif.
On se propose de calculer l'intégrale curviligne suivante :

$$I = \int_{\Gamma^+} \begin{pmatrix} x\big(1+2y\sin(x^2y)\big) \\ \\ x^2\big(1+\sin(x^2y)\big) \end{pmatrix} .d\vec{\sigma}.$$

2) (2pts) En utilisant Green-Riemann, montrer que

$$I = \iint_\Omega 2x dx dy.$$

3) (2pts) En utilisant Fubini, calculer I.

Rappels de cours :

1 Séries de Fourier :

Définition 1.1 *On appelle coefficients de Fourier de f les rï£¡els suivants*

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt,\\
a_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)dt, \forall n \geq 1,\\
b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)dt, \forall n \geq 1.
\end{aligned}
$$

Théorème 1.2 (Thï£¡orï£¡me de Dirichlet)
Si f est C^1 par morceaux, alors sa sï£¡rie de Fourier $S(x)$ converge. De plus si f est continue au point x alors $S(x) = f(x)$. Si x est un point de discontinuitï£¡ , si on note $f(x^+)$ la limite ï£¡ droite et $f(x^-)$ la limite ï£¡ droite, alors :

$$S(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$

Théorème 1.3 (Egalitï£¡ de Parseval)
On vï£¡rifie l'ï£¡galitï£¡ suivante :

$$\frac{2}{T}\int_0^T f^2(t)dt = 2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2.$$

2 Séries entières

On dï£¡finit le produit de deux sï£¡ries entiï£¡res de la faï£¡on suivante :

Définition 2.4 *(Produit de Cauchy) Soient deux sï£¡ries entiï£¡res de termes gï£¡nï£¡raux (a_n) et (b_n), on appelle produit de Cauchy de ces deux sï£¡ries la sï£¡rie de terme gï£¡nï£¡ral (c_n) dï£¡fini par :*

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

On a alors le rï£¡sultat suivant.

Proposition 2.5 *Soient deux sï£¡ries entiï£¡res de termes gï£¡nï£¡raux (a_n) et (b_n) de rayon de convergence respectifs R et R', on note (c_n) le terme gï£¡nï£¡ral de leur produit de Cauchy. Le rayon de convergence du produit de Cauchy est alors supï£¡rieur ou ï£¡gal au minimum de R et R'. De plus pour tout $|x| < Min\{R, R'\}$,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n . \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

3 Intégrales doubles

Théorème 3.6 *(***Formule de Fubini***)*
On considère deux fonctions φ_1 et φ_2 à valeurs réelles, définies et continues sur un même intervalle $[a,b]$ telles que

$$\forall t \in [a,b], \varphi_1(t) \leq \varphi_2(t).$$

On considère le domaine

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}.$$

Alors le domaine Ω est un fermé régulier et pour toute fonction f intégrable sur Ω on vérifie

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx.$$

Théorème 3.7 *(***Formule de changement de variables***)*
Soit Ω un ensemble fermé, borné, régulier du plan. Soit F une fonction définie de Ω dans Ω_1 bijective et de classe C^1. On suppose que pour tout $(x,y) \in \Omega$ $J_F(x,y) \neq 0$. On vérifie alors

$$\iint_\Omega f\big(F(x,y)\big)\big|J_F(x,y)\big|dxdy = \iint_{\Omega_1} f(u,v)dudv.$$

Une formule de changement de variables en coordonnées polaire :

$$\iint_{B(O,R)} f(x,y)dxdy = \iint_{[0,R]\times[0,2\pi]} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))rdrd\theta.$$

4 Intégrales curvilignes

Soit $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$ un champ de vecteur.

Théorème 4.8 *(***Formule de Green-Riemann***)*
Soit Ω un ouvert borné régulier. Soit Γ son bord que l'on suppose sans point double. On note Γ^+ ce bord parcouru dans le sens positif. Alors si $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$ est un champ de vecteur de classe C^1

$$\int_{\Gamma^+} \vec{F}(x,y).d\vec{\sigma} = \iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$