Université de Cergy-Pontoise **2007-2008**
S3 PC/C/STE

Examen de mathématiques
Première session
Durée 3h00

Les calculatrices et les documents sont interdits

Dans les exercices et le problème, on pourra admettre les résultats d'une question pour faire les questions suivantes.
(Le barême est donné à titre indicatif, il est susceptible de changer).

Exercice 1 :(5pts)

On considère la fonction 2-périodique f définie par

$$\forall x \in [-1,1], f(x) = |x|.$$

1) Calculer les coefficients de Fourier de f.

2) En utilisant la série de Fourier associé à f en 0, calculer la valeur de $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

3) En utilisant Parseval, donner la valeur de $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$.

Exercice 2 :(5pts)

On définit la suite de fonctions (φ_n) telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\varphi_n(t) = \frac{n\cos(\pi t)}{1 + n^2(1-t)^2}.$$

On pose quand elles sont définies :

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(t)dt$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ fixé, l'intégrale I_n est bien définie.
2) Pour t fixé, calculer la limite de $(\varphi_n(t))$ quand n tend vers $+\infty$.
3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ fixé, en faisant le changement de variable $s = n(1-t)$, trouver une fonction f_n telle que

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(s)ds.$$

3) Pour tout s fixé calculer la limite de $(f_n(s))$ quand n tend vers $+\infty$.
4) En utilisant le théorème de convergence dominée avec f_n, montrer que (I_n) converge vers une limite que l'on précisera. Pouvait-on appliquer le théorème de convergence dominée à φ_n ?

Problème(10pts)

On considère le domaine suivant :

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 1+3x^2 \leq 4x^2+y^2 \leq 4\}.$$

1) Etude de Ω : (3pts)

a) Donner la nature des domaines, $\Gamma_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 4x^2+y^2 = 4\}$ et $\Gamma_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 1+3x^2 = 4x^2+y^2\}$.

b) On note $\Omega_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 4x^2+y^2 \leq 4\}$ et $\Omega_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 \leq 1\}$. Dessiner sur une même figure Ω, Ω_1 et Ω_2.

c) Pour toute fonction continue f définie sur $\mathbb{R}^2$, exprimer $\displaystyle\iint_\Omega f(x,y)dxdy$ en fonction de $\displaystyle\iint_{\Omega_1} f(x,y)dxdy$ et $\displaystyle\iint_{\Omega_2} f(x,y)dxdy$.

• On se propose maintenant de calculer l'intégrale suivante en trois étapes :

$$I = \iint_\Omega 4x^2+3y^2-8xydxdy.$$

2) <u>1ère étape</u> : Calcul de $J = \displaystyle\iint_{\Omega_1} 4x^2+3y^2-8xydxdy$.(3.5pts)

a) En utilisant Green-Riemann, montrer que

$$J = \int_{\Gamma_1^+} \begin{pmatrix} -y(4x^2+y^2) \\ -y(4x^2+y^2) \end{pmatrix} d\vec{\sigma}.$$

b) Donner un paramétrage de Γ_1^+.

c) Calculer J avec ce paramétrage.

3) <u>2ème étape</u> : Calcul de $K = \displaystyle\iint_{\Omega_2} 4x^2+3y^2-8xydxdy$.(3pts)

a) Donner une nouvelle expression de K en effectuant un changement de variable en coordonnées polaires.

b) En déduire K.

4) <u>3ème étape</u> :(0.5pt)

En déduire I.

Les points suivants sont des rappels de cours. S'il est inutile de réécrire les énoncés utilisés, il est par contre important de justifier que les hypothèses sont vérifiées.

1 Séries de Fourier :

Définition 1.1 *On appelle coefficients de Fourier de f, une fonction T-périodique, les réels suivants*

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt,$$
$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)dt, \forall n \geq 1,$$
$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)dt, \forall n \geq 1.$$

Théorème 1.2 (Théorème de Dirichlet)
Si f est C^1 par morceaux, alors sa série de Fourier $S(x)$ converge. De plus si f est continue au point x alors $S(x) = f(x)$. Si x est un point de discontinuité , si on note $f(x^+)$ la limite à droite et $f(x^-)$ la limite à gauche, alors :

$$S(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$

Théorème 1.3 (Egalité de Parseval)
Si f est continue par morceaux sur une période, alors on vérifie l'égalité suivante
$\displaystyle \frac{2}{T}\int_0^T f^2(t)dt = 2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2.$

2 Intégrale dépendant d'un paramètre

Théorème 2.1 Théorème de convergence dominé
Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur I (où f_n et f sont des fonctions continues par morceaux sur tout segment de I), si de plus il existe une fonction g telle que $\forall t \in I, \forall n \in \mathbb{N} |f_n(t)| \leq g(t)$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ est convergente, alors $\displaystyle\mathcal{I} = \int_a^b f(t)dt$ est convergente et la suite $\displaystyle\left(\int_a^b f_n(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathcal{I}$.

Proposition 2.2 *Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction de deux variables à valeurs réelles définie sur $J \times I$, vérifiant*
- *pour tout $x \in J$ fixé, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur tout segment de I,*
- *pour tout $t \in I$ fixé, $x \mapsto f(x,t)$ est coninue sur J,*
- *il existe une fonction h définie sur I, continue sur I, telle que*

$$-\forall (x,t) \in J \times I, |f(x,t)| \leq h(t),$$

$$-\int_a^b h(t)dt \text{ est une intégrale convergente.}$$

Alors la fonction définie par

$$F(x) = \int_a^b f(x,t)dt,$$

est continue sur J.

3 Intégrales doubles

Théorème 3.1 *(***Formule de Fubini***)*
On considère deux fonctions φ_1 et φ_2 à valeurs réelles, définies et continues sur un même intervalle $[a,b]$ telles que

$$\forall t \in [a,b], \varphi_1(t) \leq \varphi_2(t).$$

On considère le domaine

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}.$$

Alors le domaine Ω est un fermé régulier et pour toute fonction f intégrable sur Ω on vérifie

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx.$$

Théorème 3.2 *(***Formule de changement de variables***)*
Soit Ω un ensemble fermé, borné, régulier du plan. Soit F une fonction définie de Ω dans Ω_1 bijective et de classe C^1. On suppose que pour tout $(x,y) \in \Omega$ $J_F(x,y) \neq 0$. On vérifie alors

$$\iint_\Omega f\big(F(x,y)\big)\big|J_F(x,y)\big|dxdy = \iint_{\Omega_1} f(u,v)dudv.$$

Une formule de changement de variables en coordonnées polaire :

$$\iint_{B(O,R)} f(x,y)dxdy = \iint_{[0,R]\times[0,2\pi]} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))rdrd\theta.$$

4 Intégrales curvilignes

Soit $\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ un champ de vecteurs.

Proposition 4.1 *Si $\vec{F}$ est de classe C^1 et défini sur un ouvert étoilé U, alors $\vec{F}$ est exact si et seulement si $\dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) - \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 0$ sur U.*

Proposition 4.2 *Si $\vec{F}$ est exact sur un ouvert U, et si f est une primitive de $\vec{F}$ ($\nabla f = \vec{F}$) alors pour tout chemin Γ inclus dans U joignant des points A et B,*

$$\int_\Gamma \vec{F}(x,y).d\vec{\sigma} = f(B) - f(A).$$

Théorème 4.3 *(***Formule de Green-Riemann***)*
Soit Ω un ouvert borné régulier. Soit Γ son bord que l'on suppose sans point double. On note Γ^+ ce bord parcouru dans le sens positif.
Si $\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ est un champ de vecteurs de classe C^1, alors

$$\int_{\Gamma^+} \vec{F}(x,y)d\vec{\sigma} = \iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$