Université de Cergy-Pontoise **2006-2007**
S3 PC/C/STE

Examen de mathématiques
Deuxième session
Durée 2h00

Les calculatrices et les documents sont interdits

Dans les exercices et le problème, on pourra admettre les résultats d'une question pour faire les questions suivantes.
(Le barême est donné à titre indicatif, il est susceptible de changer).

Exercice 1 :(5pts)

On considère la fonction $\sqrt{2}$-périodique f définie par

$$\forall x \in [0, \sqrt{2}[, f(x) = x^2.$$

1) Calculer les coefficients de Fourier de f.

2) En utilisant la série de Fourier associée à f en 0, retrouver la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

3) En utilisant Parceval, donner la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

Exercice 2 :(5pts)

On s'intéresse à l'intégrale généralisée suivante

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(t^2)dt.$$

1) Montrer que I est une intégrale convergente si et seulement si l'intégrale suivante est convergente :

$$J = \int_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{+\infty} \sin(t^2)dt.$$

2) En faisant une intégration par partie, montrer que pour tout $A > \sqrt{\frac{\pi}{2}}$,

$$\int_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{A} \sin(t^2)dt = \frac{-\cos(A^2)}{2A} - \int_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{A} \frac{\cos(t^2)}{2t^2}dt.$$

3) En déduire la nature de I(Intégrale convergente ou divergente).

Problème(10pts)

On considère le domaine suivant :

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 1 \leq 4x^2 + y^2 \leq 9\}.$$

1)(3pts) Etude de Ω.

a) Pour $k > 0$, donner la nature du domaine, $\Gamma_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 4x^2+y^2 = k^2\}$.

b) Dessiner Γ_1, Γ_3 et Ω sur une même figure.

c) On note $\Omega_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 4x^2 + y^2 \leq k^2\}$. Pour toute fonction continue f définie sur $\mathbb{R}^2$, exprimer $\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy$ en fonction de $\iint_{\Omega_1} f(x,y)dxdy$ et $\iint_{\Omega_3} f(x,y)dxdy$.

On se propose de calculer l'intégrale suivante :

$$I = \iint_{\Omega} (4x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} dxdy.$$

2)(3pts) Calcul de $J = \iint_{\Omega_1} (4x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} dxdy$.

a) En utilisant Green-Riemann, montrer que

$$J = \frac{1}{4} \int_{\Gamma_1^+} -y(4x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} dx + x(4x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} dy.$$

b) Donner un paramétrage de Γ_1^+.

c) Calculer J avec ce paramétrage.

3)(3.5pts) Calcul de $K = \iint_{\Omega_3} (4x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} dxdy$. (On se propose d'utiliser une autre méthode que celle pour J.)

a) On définit $F(x,y) = (2x, y)$, montrer que F est une bijection de Ω_3 dans $B(0,3)$, le disque de centre $(0,0)$ et de rayon 3. Calculer le jacobien de F.

b) Montrer que $\iint_{B(0,3)} (u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}} dudv = 2K$.

c) En déduire K en utilisant un changement de variables en coordonnées polaires.

4)(0.5pt) En déduire I.

Rappels de cours :

1 Séries de Fourier :

Définition 1.1 *On appelle coefficients de Fourier de f les réels suivants*

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt, \\
a_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)dt, \forall n \geq 1, \\
b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)dt, \forall n \geq 1.
\end{aligned}$$

Théorème 1.2 (Théorème de Dirichlet)
Si f est C^1 par morceaux, alors sa série de Fourier $S(x)$ converge. De plus si f est continue au point x alors $S(x) = f(x)$. Si x est un point de discontinuité , si on note $f(x^+)$ la limite à droite et $f(x^-)$ la limite à gauche, alors :

$$S(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$

Théorème 1.3 (Egalité de Parseval)
On vérifie l'égalité suivante :

$$\frac{2}{T}\int_0^T f^2(t)dt = 2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2.$$

2 Extrema d'une fonction de deux variables

On suppose que f est de classe C^2 et on note au point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y),\ s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y),\ t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y).$$

Si f admet un extremum en (x, y) alors ses dérivées partielles sont nulles et donc son DL à l'ordre 2 est donné par

$$f(x + u, y + v) = f(x, y) + \frac{1}{2}\big(ru^2 + 2suv + tv^2\big) + o(u^2 + v^2).$$

Proposition 2.4 *Si f admet un extremum local au point (x, y) alors*

$$s^2 \leq rt.$$

Théorème 2.5 *Si f les dérivées partielles sont nulles en (x, y) et si $s^2 < rt$ alors f admet un extremum local en (x, y). C'est un maximum si $r < 0$, c'est un minimum si $r > 0$.*

3 Intégrales doubles

Théorème 3.6 *(***Formule de Fubini***)*
On considère deux fonctions φ_1 et φ_2 à valeurs réelles, définies et continues sur un même intervalle $[a, b]$ telles que

$$\forall t \in [a, b], \varphi_1(t) \leq \varphi_2(t).$$

On considère le domaine

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}.$$

Alors le domaine Ω est un fermé régulier et pour toute fonction f intégrable sur Ω on vérifie

$$\iint_\Omega f(x, y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy \right) dx.$$

Théorème 3.7 *(***Formule de changement de variables***)*
Soit Ω un ensemble fermé, borné, régulier du plan. Soit F une fonction définie de Ω dans Ω_1 bijective et de classe C^1. On suppose que pour tout $(x, y) \in \Omega$ $J_F(x, y) \neq 0$. On vérifie alors

$$\iint_\Omega f\big(F(x, y)\big)\big|J_F(x, y)\big|dxdy = \iint_{\Omega_1} f(u, v)dudv.$$

Une formule de changement de variables en coordonnées polaire :

$$\iint_{B(O,R)} f(x, y)dxdy = \iint_{[0,R]\times[0,2\pi]} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))rdrd\theta.$$

4 Intégrales curvilignes

Soit $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ une forme différentielle.

Proposition 4.8 *Si ω est de classe C^1 et définie sur un ouvert étoilé U, alors ω est exacte si et seulement si $\dfrac{\partial P}{\partial y}(x, y) - \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = 0$ sur U.*

Proposition 4.9 *Si ω est exacte sur un ouvert U, et si f est une primitive de ω alors pour tout chemin Γ inclus dans U joignant des points A et B,*

$$\int_\Gamma P(x, y)dx + Q(x, y)dy = f(B) - f(A).$$

Théorème 4.10 *(***Formule de Green-Riemann***)*
Soit Ω un ouvert borné régulier. Soit Γ son bord que l'on suppose sans point double. On note Γ^+ ce bord parcouru dans le sens positif. Alors si $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ est une forme différentielle de classe C^1

$$\int_{\Gamma^+} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$