Université de Cergy-Pontoise **2006-2007**
S3 PC/C/STE

Examen de mathématiques

Durée 3h00

Les calculatrices et les documents sont interdits

Dans les exercices et le problème, on pourra admettre les résultats d'une question pour faire les questions suivantes.
(Le barême est donné à titre indicatif, il est susceptible de changer).

Exercice 1 :(4pts) Séries entières

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par:

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{n^3}{3^n}.$$

1) Enoncer le critère de d'Alembert pour les séries entières.
2) Calculer le rayon de la série entière de terme général a_n.

Exercice 2 :(6pts) Intégrales dépendant d'un paramètre

On considère la fonction de deux variables à valeurs réelles suivante:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,t) & \longmapsto & \dfrac{\cos^2(x+t)}{1+t^2}. \end{array}$$

On admettra que f est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$.
1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale généralisée suivante est convergente

$$I(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t)dt.$$

2) Montrer que pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{2}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right| \leq \frac{4}{1+t^2}.$$

3) Enoncer la propriété portant sur la dérivabilité d'une intégrale généralisée dépendant d'un paramètre.
4) Montrer que I est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de $I'(x)$ sous forme intégrale. En déduire que I est une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de $I''(x)$ sous forme intégrale.
5) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$I''(x) + 4I(x) = 2\pi.$$

Problème :

Partie I : (5pts)

On considère les deux courbes suivantes

$$\Gamma_1 = \left\{(x,y) \in [0,5]\times[-4,4], \frac{(x-5)^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1\right\},$$

et

$$\Gamma_2 = \{(x,y) \in [0,5]\times[-4,4], x^2 - y^2 = 9\}.$$

1) Donner la nature des courbes Γ_1 et Γ_2 puis les dessiner dans un même repère (vous devez voir apparaître une sorte de croissant).
On note $A = (5,4)$ et $B = (5,-4)$ les deux points d'intersection de Γ_1 et Γ_2.
On note Γ^+ la courbe partant de A le long de Γ_1 (qui rejoint B) et revenant en A le long de Γ_2. On définit alors la forme différentielle:

$$\omega = \left(\mathrm{ch}(x) + y^2\right) dx + \left(\frac{x^2}{2} + 2xy + \mathrm{sh}(y)\right) dy.$$

On cherche à calculer l'intégrale curviligne suivante

$$I = \int_{\Gamma^+} \omega.$$

2) Si $(x(t), y(t))$ est un paramètrage de Γ^+ avec $t \in [a,b]$, donner alors la formule permettant de calculer I . (on ne cherchera ni un tel paramètrage, ni à effectuer des calculs par cette méthode).
3) Enoncer la formule de Green-Riemann.
4) Démontrer en appliquant Green-Riemann que

$$I = \iint_\Omega x \, dxdy \;,$$

où

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, -4 \leq y \leq 4, 5 - 5\sqrt{1 - \frac{y^2}{16}} \leq x \leq \sqrt{9 + y^2}\right\}$$

(on expliquera comment est appliquée la formule de Green-Riemann).

Partie II : (5pts)

On admet le résultat du 4) de la partie I.
1) Enoncer le théorème de Fubini.
2) Appliquer le théorème de Fubini à I sur Ω.
3) Calculer I (pour calculer une partie de l'intégrale obtenue aprés avoir appliqué Fubini, on pourra faire le changement variable $y = 4\sin(u)$).