Université de Cergy-Pontoise **2006-2007**
S3 PC/C/STE

Examen de mathématiques

Exercice 1 :Séries entières

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par:

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{n^3}{3^n}.$$

1) Si $\left(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)$ converge vers l alors la rayon de convergence de la série est $\frac{1}{l}$..
2) Ici $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \dfrac{(1+\frac{1}{n})^3}{3}$ donc $R = 3$.

Exercice 2 : Intégrales dépendant d'un paramètre

On considère la fonction de deux variables à valeurs réelles suivante:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,t) & \longmapsto & \dfrac{\cos^2(x+t)}{1+t^2}. \end{array}$$

On admettra que f est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$.
1) L'intégrale est généralisée en $-\infty$ et en $+\infty$. Pour $t \geq 1$ on a clairement

$$\left|\frac{\cos^2(x+t)}{1+t^2}\right| \leq \frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{t^2}.$$

Or $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{t^2}dt$ est convergente donc par comparaison $\displaystyle\int_1^\infty f(t)dt$ est absolument convergente. On fait de même en $-\infty$ en se plaçant sur $]-\infty,-1[$.
2) Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{-2\cos(x+t)\sin(x+t)}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = \frac{-2\cos^2(x+t)+2\sin^2(x+t)}{1+t^2}.$$

On en déduit facilement les majorations demandées car les fonctions cosinus et sinus sont majorées et minorées par 1 et -1. 3) La propriété portant sur la dérivabilité d'une intégrale généralisée dépendant d'un paramètre donnée dans le cours est la suivante:

Proposition 0.1 *Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction de deux variables valeurs relles de sur $J \times I$, telle que la drive partielle par rapport la premire variable existe et vérifie*

• *pour tout $t \in I$ fixé, $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur J,*
• *il existe une fonction h dfinie sur I, continue sur I, telle que*

$$-\forall (x,t) \in J \times I, |\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)| \leq h(t),$$

$$-\int_a^b h(t)dt \text{ est une intgrale convergente.}$$

•$\forall x \in J$, *$t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur tout segment de I et*

$$\int_a^b f(x,t)dt \text{ est convergente}$$

Alors la fonction dfinie par

$$F(x) = \int_a^b f(x,t)dt,$$

est de classe C^1 sur J et sa drive est donne par

$$\forall x \in J, F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt.$$

4) On peut appliquer la propriété précédente à I d'après la question 2) et I est donc une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et

$$I'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-2\cos(x+t)\sin(x+t)}{1+t^2}dt.$$

On peut maintenant appliquer la propriété de cours à I' toujours d'aprés la question 2) et donc I' est C^1, soit I est C^2. Enfin on vérifie

$$I''(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-2\cos^2(x+t)+2\sin^2(x+t)}{1+t^2}dt.$$

5) On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} I''(x) + 4I(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\cos^2(x+t)+2\sin^2(x+t)}{1+t^2}dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{1+t^2}dt \\ &= 2[\text{Arctan}(t)]_{-\infty}^{+\infty} \\ &= 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2}\right) = 2\pi. \end{aligned}$$

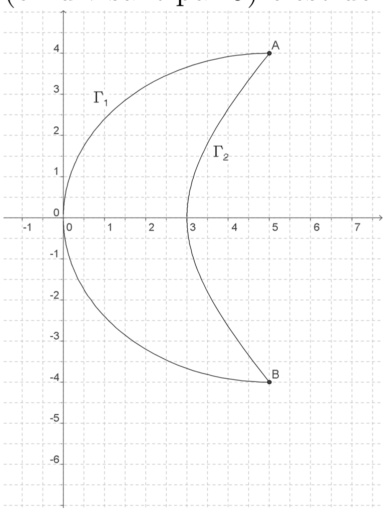
Problème :

Partie I :

On considère les deux courbes suivantes

$$\Gamma_1 = \left\{(x,y) \in [0,5] \times [-4,4], \frac{(x-5)^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1\right\},$$
et
$$\Gamma_2 = \left\{(x,y) \in [0,5] \times [-4,4], x^2 - y^2 = 9\right\}.$$

1) La courbe Γ_1 est de la forme $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$ c'est donc un morceau d'ellipse de centre $(5,0)$. La courbe Γ_2 est de la forme $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$ (en divisant par 9) c'est donc un morceau d'hyperbole de centre $(0,0)$.



On note $A = (5,4)$ et $B = (5,-4)$ les deux points d'intersection de Γ_1 et Γ_2. On note Γ^+ la courbe partant de A le long de Γ_1 (qui rejoint B) et revenant en A le long de Γ_2. On définit alors la forme différentielle:

$$\omega = \left(\operatorname{ch}(x) + y^2\right) dx + \left(\frac{x^2}{2} + 2xy + \operatorname{sh}(y)\right) dy.$$

On cherche à calculer l'intégrale curviligne suivante

$$I = \int_{\Gamma^+} \omega.$$

2) Si $(x(t), y(t))$ est un paramètrage de Γ^+ avec $t \in [a,b]$, alors d'après le cours la formule permettant de calculer I est la suivante:

$$I = \int_a^b \left(\operatorname{ch}(x(t)) + y(t)^2\right) x'(t) + \left(\frac{x(t)^2}{2} + 2x(t)y(t) + \operatorname{sh}(y(t))\right) y'(t)dt$$

3) La formule de Green-Riemann donnée dans le cours est la suivante.

Théorème 0.2 *Soit Ω un ouvert borné régulier. Soit Γ son bord que l'on suppose sans point double. On note Γ^+ ce bord parcouru dans le sens positif. Alors si $\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ est une forme différentielle de classe C^1*

$$\int_{\Gamma^+} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

4) On définit le domaine Ω de la manière suivante

$$(x,y) \in \Omega \text{ ssi } \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{(x-5)^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} \leq 1 \\ x^2 - y^2 \leq 9 \end{array} \right.$$

Alors Γ est bien le bord de Ω. De plus on vérifie facilement que Ω peut s'écrire

$$\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2, -4 \leq y \leq 4, 5 - 5\sqrt{1 - \frac{y^2}{16}} \leq x \leq \sqrt{9 + y^2} \right\}.$$

On calcule dans notre cas

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = x + 2y \text{ et } \frac{\partial P}{\partial y} = 2y,$$

Donc en appliquant Green-Riemann on obtient bien $I = \displaystyle\iint_\Omega x\, dxdy.$

Partie II :

On admet le résultat du 4) de la partie I.

1) Le théorème de Fubini énoncé dans le cours est le suivant.

Théorème 0.3 *(**Formule de Fubini**)*
On considère deux fonctions φ_1 et φ_2 à valeurs réelles, définies et continues sur un même intervalle $[a,b]$ telles que

$$\forall t \in [a,b], \varphi_1(t) \leq \varphi_2(t).$$

On considère le domaine

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}.$$

Alors le domaine Ω est un fermé régulier et pour toute fonction f intégrable sur Ω on vérifie

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx.$$

Si de plus, il existe deux fonction ψ_1 et ψ_2 continues sur un segment $[c,d]$ telles que

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\},$$

alors

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \right) dy.$$

2) En appliquant la deuxième partie du résultat du théorème de Fubini on a directement

$$I = \int_{-4}^{4} \left(\int_{5-5\sqrt{1-\frac{y^2}{16}}}^{\sqrt{9+y^2}} x dx \right) dy.$$

3) En intégrant par rapport á x on trouve

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_{-4}^{4} (9+y^2) - (5 - 5\sqrt{1-\frac{y^2}{16}})^2 dy \\ &= \int_{-4}^{4} \frac{-41}{2} + \frac{41}{32} y^2 dy + 25 \int_{-4}^{4} \sqrt{1-\frac{y^2}{16}} dy \\ &= \frac{-328}{3} + 25 \int_{-4}^{4} \sqrt{1-\frac{y^2}{16}} dy \end{aligned}$$

Si on fait le changement variable $y = 4\sin(u)$ on obtient alors

$$\begin{aligned} I &= \frac{-328}{3} + 25 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(u)} 4\cos(u) du \\ &= \frac{-328}{3} + 25 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^2(u) du \\ &= \frac{-328}{3} + 25 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4 \frac{1+\cos(2u)}{2} du \\ &= \frac{-328}{3} + 50\pi. \end{aligned}$$