Université de Cergy-Pontoise **2005-2006**
S3 PC/C/STE

Examen de mathématiques
Deuxième session
Durée 2h00

Les calculatrices et les documents sont interdits

Dans les exercices et le problème, on pourra admettre les résultats d'une question pour faire les questions suivantes.
(Le barême est donné à titre indicatif, il est susceptible de changer).

Exercice 1 : (5pts) Séries entières

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$a_0 = 1 \text{ et } \forall n \geq 1, a_n = \frac{n!}{n^n}.$$

1) Vérifier que $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.
2) Calculer le rayon de convergence de la série entière de terme général (a_n).

Exercice 2 : (5pts) Intégrales généralisées

On considère les intégrales généralisées suivantes pour $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$I_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{t(\cos(t)+\alpha)}{1+t^2}dt.$$

1) Etude du cas $\alpha = 0$.
Soit $A > 0$, en faisant une intégration par partie dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^A \frac{t}{1+t^2}\cos t dt$, montrer que I_0 est une intégrale convergente.
2) En déduire, en vous justifiant bien, que I_α est une intégrale divergente pour tout $\alpha \neq 0$.

Problème :

Partie I : (6pts) Calcul d'une aire.

Soient α, β deux réels et soient $a > 0$, $b < 0$. On définit le domaine $\mathcal{E}$ par

$$\mathcal{E} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} \leq 1\right\}.$$

On se propose de calculer l'aire de $\mathcal{E}$ notée $\mathcal{A}(\mathcal{E})$.

1) Rappeler la nature géométrique du domaine $\mathcal{E}$.

2) Soit F la fonction définie par :

$$F: \begin{array}{ccc} [0,1]\times[0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (r,\theta) & \longmapsto & (\alpha + ar\cos\theta, \beta + br\sin\theta). \end{array}$$

a) Vérifier que F est à valeurs dans $\mathcal{E}$.

b) Est-ce que F définit une bijection de $[0,1]\times[0,2\pi]$ dans $\mathcal{E}$?

c) Calculer le jacobien de F.

3) Rappeler la formule de changement de variable en dimension 2.

4) En supposant que l'on peut faire le changement de variable proposé par F, montrer que

$$\mathcal{A}(\mathcal{E}) = \iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} -rab\, drd\theta.$$

5) En déduire l'aire de $\mathcal{E}$.

Partie II : (5pts) Un calcul d'intégral curviligne

Soit $\Gamma = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x^2+2x+\frac{y^2}{4}=0\right\}$ et on considére la forme différentielle

$$\omega = (x\sqrt{x^2+y^2+1}+y)dx + (y\sqrt{x^2+y^2+1}+2x)dy.$$

On se propose de calculer l'intégrale curviligne de ω le long de Γ parcouru dans le sens positif que l'on note

$$I = \int_{\Gamma^+} \omega d\sigma.$$

On note $\Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x^2+2x+\frac{y^2}{4}\leq 0\right\}$.

1) Enoncer la propriété de Green-Riemann.

2) En utilisant Green-Riemann, montrer que $I = \iint_\Omega 1 dxdy$.

3) Vérifier que $(x,y)\in\Omega$ si et seulement si $(x+1)^2+\frac{y^2}{4}\leq 1$.

4) En utilisant la partie I, en déduire la valeur de I.