Université de Cergy-Pontoise **2005-2006**
S3 PC/C/STE

Examen final de mathématiques
Durée 3h00

Les calculatrices et les documents sont interdits

Dans les exercices, on pourra admettre les résultats d'une question pour faire les questions suivantes.
(Le barême est donné à titre indicatif, il est susceptible de changer).

Exercice 1 :(7pts)

Soit f la fonction de deux variables définies par

$$f(x,t)=\frac{\cos^2(t)}{xt^2+t+x}.$$

1)a) Etudier la convergence de :

$$I(1)=\int_0^{\infty} f(1,t)dt=\int_0^{\infty}\frac{\cos^2(t)}{t^2+t+1}dt.$$

b) Etudier la convergence de $I(0)=\int_0^{\infty} f(0,t)dt$.

2) On définit la fonction F pour tout $x>0$ par

$$F(x)=\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x,t)dt.$$

a) Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer sa dérivée.
b) En déduire le sens de variation de F.
c) Montrer que pour tout $t\in[0,\frac{\pi}{3}]$

$$f(x,t)\geq\frac{(\frac{1}{2})^2}{t+x}.$$

d) En déduire $F(x)\geq\frac{1}{4}(\ln(\frac{\pi}{3}+x)-\ln(x))$, puis la limite de F en 0.

Exercice 2 :(7 pts)

On définit la fonction f 2π-périodique par

$$\forall x\in[0,2\pi[,\qquad f(x)=2\pi-x.$$

1) Représenter la fonction f sur l'intervalle $[-2\pi,4\pi]$.
2) Calculer les coefficients de Fourier de f.
3) En calculant f en $\frac{\pi}{2}$, calculer

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

4) En appliquant Parseval, retrouver la somme de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 3 :(7pts)

Soit le demi-disque de centre $(0,0)$ et de rayon R défini par

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y \geq 0 \text{ et } x^2 + y^2 \leq R\}.$$

On note Γ son bord orienté dans le sens positif qui se sépare en deux parties Γ_1 le bord du disque et Γ_2 le segment.

On rappelle qu'un paramètrage de Γ_1 est donné par $(x(t), y(t)) = (R\cos(t), R\sin(t))$ pour $t \in [0, \pi]$.
On rappelle qu'un paramètrage de Γ_2 est donné par $(x(t), y(t)) = (t, 0)$ pour $t \in [-R, R]$.
On considère la forme différentielle suivante :

$$\omega = -y\sqrt{x^2+y^2}dx + x\sqrt{x^2+y^2}dy.$$

1) Rappeler la formule permettant de calculer sur un bord γ paramétré par $(x(t), y(t))$ pour $t \in [a,b]$ l'intégrale curviligne suivante :

$$\int_\gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

2)a) Utiliser la formule précedente pour montrer que

$$\int_{\Gamma_1} \omega = \int_0^\pi R^3 dt, \quad \text{et} \quad \int_{\Gamma_2} \omega = 0.$$

b) En déduire la valeure de $\int_\Gamma \omega$.
3) Rappeler la formule de Green.
4) En appliquant la formule de Green et en passant en polaire montrer que

$$\int_\Gamma \omega = \int_0^R \int_0^\pi 3r^2 dr d\theta.$$