CY Cergy Paris Université
L2 Mineure Analyse numérique

Examen du 6 janvier 2023

Exercice 1. Soit $f(x) = e^{-x} - x$. On veut résoudre l'équation $f(x) = 0$. Pour cela on considère la suite de Newton définie par

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (1)$$

1. Soit $g(x) = e^{-x}$. Calculer g' et g''.
2. Faire un tableau de variations de g' sur $[\frac{1}{2}, 1]$.
3. En déduire que $\forall x \in [\frac{1}{2}, 1]$ $|g'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt(e)}$.
4. En déduire que l'équation $g(x) = x$ a une unique solution dans $[\frac{1}{2}, 1]$ c'est à dire $f(x) = 0$.
5. On considère la suite définie par recurrence par (1) avec $x_0 \in [\frac{1}{2}, 1]$. Montrer que cette suite est parfaitement définie $\forall x_0 \in \mathbb{R}$.
6. Ecrire une fonction Newton qui recoit en entrée x_0 et N et qui renvoie les N premiers éléments de la suite (x_n).
7. Donner des résultats pour $N = 100$ et $N = 1000$ et $x_0 = \frac{1}{2}$.
8. Ecrire une fonction Newton2 pour déterminer une valeur approchée de la solution à 10^{-6} près.

Exercice 2. Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$. Pour calculer son intégrale approchée par la méthode des rectangles, on pose $h = \frac{b-a}{n}$ et on pose $x_i = a + ih$, pour tout entier $i \in \{0, \cdots, n\}$ (ainsi,$a_0 = a$ et $a_n = b$). On pose ensuite

$$S_n(f) = h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i).$$

1. Calculer $\int_0^1 \frac{1}{1+x} \, d\, x$.
2. Ecrire une fonction f qui a pour argument d'entrée un réel x et renvoie $\frac{1}{1+x}$.
3. Tracer f sur le segment $[0, 1]$ en prenant 100 points.
4. Ecrire une fonction qui recoit en argument d'entrée une fonction f, a, b et n et qui renvoie la valeur $S_n(f)$.
5. Afficher les resultats pour $n = 3, 10, 100, 100000$.

Exercice 3 .

1. Résoudre l'équation $y'(t) = y(t)$ avec y(0)=1.

2. Étant donné un entier $\mathtt{N} \geq 1$, nous notons dans toute la suite $\mathtt{h} = 1/\mathtt{N}$. Définir une fonction **`EulerExp`** qui prend en entrée un nombre $\mathtt{N} \geq 1$, et renvoie la liste des valeurs approchées $(\mathtt{y}_n)_{0\leq n\leq \mathtt{N}}$ de la solution aux temps $(\mathtt{t}_n = n\,\mathtt{h})_{0\leq n\leq \mathtt{N}}$, qui sont données par la méthode d'Euler explicite

$$\mathtt{y}_0 = 0, \quad \text{et} \quad \forall 0 \leq n \leq \mathtt{N}-1,\ \mathtt{y}_{n+1} = (1+h)\mathtt{y}_n.$$

3. Tracer sur la même figure, la solution approchée $(\mathtt{y}_n)_{0\leq n\leq N-1}$ obtenue par la fonction **`EulerExp`** et la solution exacte en mettant un titre et une légende avec $N = 1000$.