Examen Final : MI,M,MP, ENSI

Durée : 3h00

Les calculatrices et les documents sont interdits

Dans les exercices et le problème, on pourra admettre les résultats d'une question pour faire les questions suivantes.
Le barême est donné à titre indicatif, il est susceptible de changer.

Question de cours(3pt)

Rappeler la définition du rayon de convergence, R, d'une série entière de terme général $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Montrer que si $|x| < R$ alors la série de terme général $(a_nx^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 1 Séries numériques(6pts)

1)(1,5pts) Donner la nature de la série de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}.$$

2)(3pts) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$v_n = \frac{n^n}{2^n n!}.$$

a) Montrer que $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{1}{2}(1+\frac{1}{n})^n$.

b) En déduire que $\left(\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite que l'on précisera.

c) Quelle est la nature de la série de terme général $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3)(1,5pts) Donner la nature de la série de terme général $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 2 Séries entières (5pts)

On considère la série entière de terme général $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $a_0 = 0$ et $a_n = \dfrac{2^n}{n}$ pour tout $n \geq 1$.

1) Donner le rayon de convergence, R, de la série entière. Précisez si la série converge en R ou $-R$.

On note alors quand la série converge $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

2) Rappeler pourquoi f est dérivable sur $]-R, R[$. Exprimer f' à l'aide d'une série entière.

3) En déduire une expression explicite de f' puis de f.

Exercice 3 Séries de fonctions (6pts)

On souhaite étudier la série de fonctions définies sur $[0,1]$ de terme général $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où

$$\forall x \in [0,1], \quad f_n(x) = \frac{1}{\ln^\alpha(n+1)} x^n(1-x),$$

et $\alpha > 0$ est un réel fixé.

1)(1,5pts) Etude de la convergence simple.

a) Etudier la convergence de $\sum f_n(0)$ et $\sum f_n(1)$.

b) Soit $x \in]0,1[$ fixé. En utilisant d'Alembert, préciser pour quelles valeurs de α, $\sum f_n(x)$ converge.

c) Conclure.

2)(2pt) Etude de la convergence normale sur [0,1].

a) Soit $n \geq 1$ fixé, étudier le sens de variation de f_n sur $[0,1]$.

b) En déduire qu'il existe $k > 0$ tel que $\sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x)| \sim \dfrac{k}{n\ln^\alpha(n+1)}$ (on pourra écrire $(\frac{n}{n+1})^n$ en fonction de $(1+\frac{1}{n})^n$).

c) En utilisant le résultat sur les séries de Bertrand rappelé en fin de sujet, pour quelles valeurs de α la série est-elle normalement convergente sur $[0,1]$?

3)(2,5pts) Etude de la convergence uniforme.

a) Montrer que pour tout $n > 0$ et pour tout $x \in [0,1]$, $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} |x^k(1-x)| \leq 1$.

b) En déduire que pour tout $n > 0$ et pour tout $x \in [0,1]$, $\displaystyle\left|\sum_{k=n}^{+\infty} f_k(x)\right| \leq \frac{1}{\ln^\alpha(n+1)}$.

c) Pour quelles valeurs de α la série converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?

Rappels :

$\ln(2) \simeq 0,69$, $\ln(10) \simeq 2,3$,
$\exp(1) \simeq 2,72$, $\exp(2) \simeq 7,39$

On rappelle le résultat de cours suivant :

Proposition 0.1 *Les séries de terme général* $\left(\dfrac{1}{n^\beta ln(n)^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *sont :*

- *convergentes si* $\beta > 1$.
- *divergentes si* $\beta < 1$.
- *convergentes si* $\beta = 1$ *et* $\alpha > 1$.
- *divergentes si* $\beta = 1$ *et* $\alpha \leq 1$.