Examen Final : MI,M,MP, ENSI

Durée : 3h00

Les calculatrices et les documents sont interdits

Dans les exercices et le problème, on pourra admettre les résultats d'une question pour faire les questions suivantes.
Le barême est donné à titre indicatif, il est susceptible de changer.

Question de cours(1pt)

Enoncer la propriété garantissant la continuité de la limite d'une suite de fonctions en un point x_0.

Exercice 1 Séries numériques(5pts)

On considère les suites suivantes définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n+2}\right), \quad v_n = n\ln\left(1 + \frac{1}{n(n+1)}\right),$$
$$\text{et} \quad w_n = u_n + v_n.$$

1)(2pts) Donner la nature des séries de termes généraux $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2)(1.5pt) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$w_n = \ln\left(\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^n \times \frac{(n+1)}{(n+2)}\right).$$

En déduire de $w_n = \ln\left((1+\frac{1}{n})^n\right) - \ln\left((1+\frac{1}{n+1})^{n+1}\right)$.
3)(1pt) Montrer que pour tout $N \geq 1$

$$\sum_{n=1}^{N} w_n = \ln(2) - (N+1)\ln\left(1 + \frac{1}{N+1}\right).$$

4)(0.5pt) En déduire que la série de terme général $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et donner la valeur de sa somme $\sum_{n=1}^{+\infty} w_n$.

Exercice 2 Séries entières (7pts)

1)(2pts) Donner le rayon de convergence de la série entière de terme général $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $a_0 = 1$ et $a_n = \frac{3}{2}$ pour tout $n \geq 1$. On note quand la série converge $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Donner une expression explicite de $f(x)$ quand elle existe.
2)(2pt) Donner R, le rayon de convergence de la série entière de terme général $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $b_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (on pourra utiliser d'Alembert). Préciser le comportement de la série en R et $-R$.
3)(3pts) Pour tout $x \in [0,1]$, on note $f_n(x) = \dfrac{\sqrt{n}}{n+1} x^n(1-x)$.

a) En utilisant la question 2), justifier que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,1]$(on traitera à part le cas $x=1$). On note g la fonction ainsi définie.

b) Montrer que la série converge normalement sur le segment $[0,1]$. En déduire le domaine de continuité de g.

Exercice 3 Séries de fonctions (7pts)

On souhaite étudier la série de fonctions définies sur $]0,2\pi[$ de teme général $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où

$$\forall x \in]0,2\pi[, \quad f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}.$$

1)(1.5pts) Soit $x \in]0,2\pi[$ fixé.

a) Montrer que pour tout $n_0 > 0$ et tout $p \geq 0$,

$$\left|\sum_{k=n_0}^{n_0+p} \sin(kx)\right| \leq \frac{2}{|1-e^{ix}|}$$

b) En factorisant par $e^{ix/2}$, vérifier que $|1-e^{ix}| = 2|\sin(\frac{x}{2})|$. En déduire que,

$$\left|\sum_{k=n_0}^{n_0+p} \sin(kx)\right| \leq \frac{1}{\sin(\frac{x}{2})}.$$

2)(1pt) En utilisant le 1), la règle d'Abel (rappelée ci-dessous) et en se fixant un réel $x \in]0,2\pi[$, montrer que la série de fonctions (f_n) converge simplement sur $]0,2\pi[$ vers une fonction notée S.

3)(1pt) On se fixe un paramètre $\eta \in]0,\pi[$. En utilisant la règle d'Abel montrer que pour tout $x \in [\eta, 2\pi-\eta]$ et pour tout $n_0 > 0$,

$$\left|\sum_{k=n_0}^{+\infty} \frac{\sin(kx)}{k}\right| \leq \frac{1}{\sin(\frac{\eta}{2})n_0}.$$

4)(1pt) En déduire que la série converge uniformément vers S sur tout segment $[a,b] \subset]0,2\pi[$.

5)(1pt) Montrer que S est continue sur $]0,2\pi[$.

6)(1.5pts) On souhaite étudier la dérivabilité de S.

a) Montrer que pour tout $x \in]0,2\pi[$, la série de terme général $(f_n'(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge.

b) Les résultats sur les séries de Fourier permettent d'affirmer que pour tout $x \in]0,2\pi[$ $S(x) = x$. S est-elle dérivable ? Si oui, S' peut-elle être égale à la série de terme général $(f_n')_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Rappel de cours

Théorème 0.1 *(règle d'Abel) Soient (u_n) et (v_n) deux suites vérifiant les propriétés suivantes*

i) Il existe une constante K telle que $\forall n, p$, $\left|\sum_{k=n}^{n+p} u_k\right| \leq K$.

ii) La suite (v_n) décroit vers 0.

Alors la série de terme général $(u_n v_n)$ est convergente. De plus la suite des restes de cette série vérifie :

$$\forall n, \left|\sum_{k=n}^{+\infty} u_k v_k\right| \leq K v_n.$$