Examen Final : MI,M,MP, ENSI
Correction

Question de cours

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I sur lequel elle converge simplement vers une fonction f. Si en un point $x_0 \in I$, toutes les fonctions f_n sont continues et si la suite converge uniformément vers f sur un voisinage de x_0 (ou sur I) alors f est continue en x_0.

Exercice 1 Séries numériques

On considère les suites suivantes définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n+2}\right), \quad v_n = n\ln\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right),$$
$$\text{et} \quad w_n = u_n + v_n.$$

1) on sait que au voisinage de 0 $\ln(1+x) \sim x$. On en déduit immédiatement que

$$u_n \sim \frac{-1}{n} \quad \text{et} \quad v_n \sim \frac{1}{n}.$$

Par comparaison avec les séries de Riemman (avec $\alpha \leq 1$) on en déduit que les deux séries divergent.
2) En utilisant les propriétés du logarithme, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
w_n &= \ln\left(1 - \frac{1}{n+2}\right) + n\ln\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right) \\
&= \ln\left(\left(\frac{n+2-1}{n+2}\right) \times \left(\frac{n(n+2)+1}{n(n+2)}\right)^n\right) \\
&= \ln\left(\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^n \times \left(\frac{(n+1)}{(n+2)}\right)\right).
\end{aligned}$$

On remarque de plus que

$$\begin{aligned}
\ln\left((1+\tfrac{1}{n})^n\right) - \ln\left((1+\tfrac{1}{n+1})^{n+1}\right) &= \ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right) - \ln\left(\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}\right) \\
&= \ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \times \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}\right) \\
&= \ln\left(\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^n \times \left(\frac{n+1}{n+2})\right)\right).
\end{aligned}$$

On trouve donc bien $w_n = \ln\left((1+\frac{1}{n})^n\right) - \ln\left((1+\frac{1}{n+1})^{n+1}\right)$.
3) En utilisant la question précédente, pour tout $N \geq 1$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} w_n &= \sum_{n=1}^{N} \ln\left((1+\frac{1}{n})^n\right) - \ln\left((1+\frac{1}{n+1})^{n+1}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{N} \ln\left((1+\frac{1}{n})^n\right) - \sum_{n=2}^{N+1} \ln\left((1+\frac{1}{n})^n\right) \\
&= \ln(2) - (N+1)\ln\left(1+\frac{1}{N+1}\right).
\end{aligned}$$

(On vient de remontrer le résultat sur les séries télescopiques).
4) En utilisant l'équivalent au voisinage de 0 $\ln(1+x) \sim x$, on a $(N+1)\ln\left(1+\dfrac{1}{N+1}\right) \sim 1$.
Donc on peut passer à la limite dans la dernière expression. La série converge et sa somme vaut $\ln(2) - 1$

Exercice 2 Séries entières (7pts)

1) En appliquant le critère de d'Alembert, pour tout $n \geq 1$, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, la suite $\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ converge donc vers 1 (on s'intéresse au comportement de $(\frac{a_{n+1}}{a_n})$ quand n tend vers $+\infty$, la valeur de $\frac{a_1}{a_0}$ ne change en rien la limite en $+\infty$) et donc le rayon de la série associée vaut $\dfrac{1}{1} = 1$.
Pour tout $x \in]-1;1[$, $f(x) = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{2}x^n = 1 + \frac{3x}{2(1-x)}$.
2) La suite $\left(\dfrac{b_{n+1}}{b_n}\right)$ est définie pour $n \geq 1$ et converge clairement vers 1. On en déduit que le rayon de convregence de cette série $R = 1$.
Pour $x = 1$ en notant que $b_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, par comparaison avec les séries de Riemman, on en déduit que la série est divergente en 1.
Pour $x = -1$, on a une série alternée. Si on montre que (b_n) décroit vers 0, alors la série converge en $x = -1$. On peut étudier le rapport

$$\begin{aligned}
\frac{b_{n+1}}{b_n} &= \frac{\sqrt{n+1}(n+1)}{(n+2)\sqrt{n}} \\
&= \frac{(1+\frac{1}{n})^{\frac{3}{2}}}{(1+\frac{2}{n})} \\
&= (1+\tfrac{3}{2n})(1-\tfrac{2}{n}) + o(\tfrac{1}{n}) \\
&= 1 - \tfrac{1}{2n} + o(\tfrac{1}{n})
\end{aligned}$$

On en déduit qu'à partir d'un certain rang la suite (b_n) est bien décroissante, le rapport précédent étant inférieur à 1. (On pouvait aussi étudier le sens de variation de la fonction $\varphi : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$ sur $[0, +\infty[$, on trouve facilement que $\varphi'(x) = \dfrac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)}$ et donc (b_n) est décroissante à partir de $n = 1$). La série est bien convergente en $x = -1$.
3) Pour tout $x \in [0,1]$, on note $f_n(x) = \dfrac{\sqrt{n}}{n+1}x^n(1-x)$.

a) On remarque que la série de terme général (f_n) est le produit de la série entière précédente par $(1-x)$. La série converge donc bien pour $x \in [0,1[$. Pour $x=1$, $f_n(x)=0$ et la série converge donc ausi pour $x=1$. On note g la fonction ainsi définie.

b) On souhaite étudier si $\sum \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)|$ converge. On étudie les variations de f_n sur $[0;1]$, or $f_n'(x) = \dfrac{\sqrt{n}}{n+1} x^{n-1}(n-(n+1)x)$. On en déduit que pour tout $x \in [0,1]$,

$$0 \leq f_n(x) \leq f_n(\frac{n}{n+1}).$$

Or $f_n(\frac{n}{n+1}) = \dfrac{\sqrt{n}}{n+1}(1-\frac{1}{n+1})^n \dfrac{1}{n+1}$. On note que $(1-\frac{1}{n+1})^n = \exp\left(n\ln(1-\frac{1}{n+1})\right)$ qui converge e^{-1} et donc $f_n(\frac{n}{n+1}) \sim \dfrac{e^{-1}}{n^{\frac{3}{2}}}$. C'est donc le terme général d'une série convergente par comparaison avec les séries de Riemman et la série converge normalement sur [0,1]. Comme les fonctions f_n sont toutes continues, on en déduit que g est continue sur $[0,1]$.

Exercice 3 Séries de fonctions

On souhaite étudier la série de fonctions définies sur $]0,2\pi[$ de teme général $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où

$$\forall x \in]0,2\pi[, \quad f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}.$$

1) Soit $x \in]0,2\pi[$ fixé.

a) Pour tout $n_0 > 0$ et tout $p \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=n_0}^{n_0+p} \sin(kx)\right| &= \left|\mathrm{Im}\left(\sum_{k=n_0}^{n_0+p} e^{ikx}\right)\right| \\
&= \left|\mathrm{Im}\left(\frac{e^{in_0x} - e^{i(n_0+p)x}}{1-e^{ix}}\right)\right| \\
&\leq \frac{2}{|1-e^{ix}|}.
\end{aligned}$$

b) En factorisant par $e^{ix/2}$, on a $|1-e^{ix}| = |e^{ix/2}||e^{-ix/2} - e^{ix/2}| = 2|\sin(\frac{x}{2})|$. De plus pour $x \in]0,2\pi[$, $\sin(\frac{x}{2}) > 0$. On en déduit bien que,

$$\left|\sum_{k=n_0}^{n_0+p} \sin(kx)\right| \leq \frac{1}{\sin(\frac{x}{2})}.$$

2) On souhaite utiliser la règle d'Abel (rappelée ci-dessous). Soit un réel $x \in]0,2\pi[$, $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n}$, la suite $(v_n) = (\frac{1}{n})$ décroit vers 0. Selon la question précédente la suite $(u_n) = (\sin(nx))$ vérifie que

$$\left|\sum_{k=n_0}^{n_0+p} \sin(kx)\right| \leq \frac{1}{\sin(\frac{x}{2})}.$$

Or $\dfrac{1}{\sin(\frac{x}{2})}$ ne dépend pas de n. On a donc bien les hypothèses d'Abel vérifiée et donc $\sum f_n(x)$ converge. On vient de montrer que la série de fonctions (f_n) converge simplement sur $]0,2\pi[$ vers une fonction que l'on note S.

3) On se fixe un paramètre $\eta \in]0,\pi[$. Si on pose $h(x) = \sin(\frac{x}{2})$ sur $]0,2\pi[$, alors on note que

h est croissante sur $]0,\pi[$ puis décroissante sur $]\pi,2\pi[$ en restant strictement positive. On en déduit que $x \mapsto \dfrac{1}{\sin(\frac{x}{2})}$ sur $[\eta, 2\pi-\eta]$ atteint son maximum en η (et $2\pi-\eta$). Donc pour tout $x \in [\eta, 2\pi-\eta]$ et pour tout $n_0 > 0$,

$$\left|\sum_{k=n_0}^{n_0+p} \sin(kx)\right| \leq \frac{1}{\sin(\frac{\eta}{2})}.$$

En appliquant la deuxième partie du théorème d'Abel on a bien que pour tout $x \in [\eta, 2\pi-\eta]$

$$\left|\sum_{k=n_0}^{+\infty} \frac{\sin(kx)}{k}\right| \leq \frac{1}{\sin(\frac{\eta}{2})n_0}.$$

4) Soit un segment $[a,b] \subset]0,2\pi[$. Alors il existe $\eta > 0$ tel que $[a,b] \subset [\eta, 2\pi-\eta] \subset]0,2\pi[$(en choisissant η assez petit). On a alors

$$\sup_{x\in[a,b]} \left|\sum_{k=n_0}^{+\infty} \frac{\sin(kx)}{k}\right| \leq \sup_{x\in[\eta,2\pi-\eta]} \left|\sum_{k=n_0}^{+\infty} \frac{\sin(kx)}{k}\right| \leq \frac{1}{\sin(\frac{\eta}{2})n_0}.$$

qui tend vers 0 quand n_0 tend vers l'infini. C'est la définition de la convergence uniforme pour une série.

5) Pour tout $x \in [0,2\pi]$ fixé, il existe a et b dans $]0,2\pi[$ tels que $x \in]a,b[$. Comme la convergence est uniforme que $[a,b]$ et que les fonctions f_n sont continues, S est continue en x. Ceci est vrai pour tout point donc S est continue sur $]0,2\pi[$.

6) On souhaite étudier la dérivabilité de S.

a) Soit $x \in]0,2\pi[$, $(f_n'(x))_{n\in\mathbb{N}^*} = (\cos(nx))_{n\in\mathbb{N}^*}$. Cette suite ne converge pas vers 0 (elle est même divergente) on en déduit que la série $\sum f_n'(x)$ diverge pour tout $x \in]0,2\pi[$ (elle est grossièrement divergente).

b) Les résultats sur les séries de Fourier permettent d'affirmer que pour tout $x \in]0,2\pi[$ $S(x) = x$. S est donc bien dérivable. On a bien sûr $S'(x) = 1$ pour tout x mais elle ne peut pas être égale à la série de terme général $(f_n')_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui diverge.