Examen de Séries (M3S)
(durée 3 heures - Documents, calculettes, téléphones mobiles sont formellement interdits)

Question de Cours.–
1) Rappeler le théorème des séries alternées et donner un exemple d'application.
2) Rappeler les critères donnant la nature d'une série de Riemann.

Exercice 1.– Etudier la nature des séries numériques dont le terme général est donné ci-dessous :

$$\left(\frac{2n+1}{3n+4}\right)^n, \quad \frac{(\cos n)^3}{n\sqrt{n}}, \quad \frac{1}{n^2+1}\big((-1)^n n+2\big)$$

Exercice 2.– On considère la suite de fonctions définies sur $I=[0,1]$ par $f_n(x)=\dfrac{ne^x}{n+x}$.
1) Montrer que cette suite de fonctions converge simplement sur I vers une fonction f qu'on déterminera.
2) Montrer que $\forall x \in I$, on a $\left|\dfrac{xe^x}{n+x}\right| \leq \dfrac{e}{n}$.
3) Etudier la convergence uniforme sur I de cette suite de fonctions.
4) Calculer en justifiant votre raisonnement la valeur de la limite suivante : $lim_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^1 \frac{ne^x}{n+x}dx$.

Exercice 3.– Pour $n \geq 1$ soit $u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $u_n(x)=\dfrac{e^{-\sqrt{n}x}}{1+n^2}$.
1) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$. Converge t-elle simplement sur $\mathbb{R}$?
2) Etudier la convergence normale sur $\mathbb{R}^+$.
3) On note sur $\mathbb{R}^+$, $S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ la somme de la série.
   a) S est-elle bien définie sur $\mathbb{R}^+$?
   b) S est-elle continue sur $\mathbb{R}^+$?
   c) S est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$?.

Exercice 4.–
A– Cours :
A1) Rappeler le théorème de dérivation de la somme d'une série entière.
A2) Montrer que la fonction $-\ln(1-x)$ se développe en série entière sur l'intervalle $]-1,1[$ et que ce développement est : $-\ln(1-x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$.

B– Pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose $u_n(x)=\frac{x^n}{n(n+1)}$; on se propose d'étudier la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ et les propriétés de sa somme $S(x)$.
1) Quel est le rayon de convergence R de la série ?
2) Etudier la convergence de la série pour $x=R$ puis pour $x=-R$, et en déduire le domaine D de convergence simple de la série.
3) Montrer que sa somme, notée $S(x)$, est continue sur D.
4) a) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{t(t+1)}$.
   b) En utilisant le développement donné en A2) et la décomposition obtenue dans 4)a-, en déduire une expression de $S(x)$ sur $]-R,0[\cup]0,R[$, puis donner l'expression de $S(x)$ sur $]-R,R[$.
5) En utilsant ce qui précède et en justifiant vos réponses calculer les sommes des deux séries numériques suivantes :

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)}, \qquad \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n(n+1)}.$$