Université de Cergy-Pontoise 2009/2010
Licence L2-MPI

Examen de Séries. (Durée 3 heures)
– Les documents, les calculatrices et les téléphones portables sont interdits –

Exercice 1 Soit $\alpha \in]0, \pi[$ un réel fixé. On considère la fonction f **paire** et 2π périodique telle que

$$f(x) = \frac{\pi}{2} \text{ pour } x \in [0, \alpha] \text{ et } f(x) = 0 \text{ pour } x \in]\alpha, \pi].$$

a) Représenter la fonction f (avec $\alpha = \frac{\pi}{4}$), au moins sur $[-4\pi, 4\pi]$.
b) Calculer les coefficients de Fourier de f. Donner l'expression de la série de Fourier de f.
c) La série de Fourier de f converge t-elle ? Converge t-elle vers f ?
d) Déterminer en fonction de α, la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\alpha)}{n}$.

Exercice 2 1) Montrer que la fonction $x \to \ln(1-x)$ est éveloppable en série entière sur $]-1, 1[$ et que l'on a $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$, pour $x \in]-1, 1[$..
2) On considère la série entière

$$\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$$

a) Calculer son rayon de convergence. Préciser l'intervalle (le plus grand intervalle possible) I de convergence. La série converge t-elle normalement sur I ?
b) Montrer que sa somme $S(x)$ est définie et continue sur $[-1, +1]$.
c) Montrer que S est dérivable sur $]-1, +1[$.
d) En utilisant le résultat de 1), exprimer $S'(x)$ en fonction de $\ln(1-x)$.

Exercice 3 Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ avec $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \frac{n^\alpha x}{1 + n^2 x^2} \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R} \text{ un paramètre.}$$

1) On cherche tout d'abord à étudier **la suite de fonctions** (f_n) en fonction de α.
a) Etudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de **la suite de fonctions** (f_n) en distnguant trois cas : $\alpha > 2, \alpha = 2, \alpha < 2$. Pour chaque cas, donner l'expression de la fonction limite f et le domaine de $\mathbb{R}$ où la convergence a lieu.
b) Dans le cas où $\alpha = 2$, que peut-on dire de la fonction limite f ? Qu'en déduire concernant la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions (f_n) ?
c) Dans le cas où $\alpha < 2$, étudier les variations de la fonction f_n. En déduire les valeurs de α pour lesquelles **la suite de fonctions** (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

2) Dans le cas où $\alpha < 2$, on cherche maintenant à étudier **la série de fonctions** $\sum_{n \geq 1} f_n$ en fonction de α.
a) Déterminer les valeurs de $\alpha < 2$ pour lesquelles la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
b) En déduire que pour ces valeurs la somme de la série, $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$: on justifiera soigneusement le raisonnement.

3) On pose pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$,

$$u_n(x) = (-1)^n (e^{\frac{x}{n}} - 1).$$

a) Montrer que pour tout réel x, la série $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$ est convergente (on distinguera les cas $x > 0, x = 0, x < 0$).
b) Montrer que pour tout réel x, cette série n'est pas absolument convergente (on distinguera les