S3 M,MI,MP
3 Novembre 2008
Durée 1 heure 40

Partiel de Mathématiques

Calculatrice et document sont interdits.
Barème indicatif : 2+6+6+6

Question de cours :

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définie sur un intervalle I, qui converge vers une fonction S. Quelles hypothèses suffisantes peut-on faire sur les f_n pour être sûr que la fonction S est dérivable ?

Exercice 1 :

Étudier la convergence des trois séries suivantes :

$$\sum \frac{n^3}{2^n} \qquad \sum \frac{n^2+\ln n}{n^4+1} \qquad \sum \frac{(-1)^n}{\cos \frac{1}{n}}$$

Exercice 2 :

1) On pose pour $n \geq 2,\ u_n = \ln\left(\frac{\sqrt{n}\ +\ (-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$. Déterminer un équivalent simple de u_n.
2) En déduire que la série $\sum |u_n|$ est divergente.
3) Rappeler le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction définie par $\ln(1+x)$.
4) Étudier la convergence de la série de terme général u_n.

Exercice 3 :

On pose pour tout entier n et tout réel positif x,

$$f_n(x) = x^2 + nxe^{-nx}$$

1) Rappeler la limite classique suivante : $\lim_{u\to+\infty} ue^{-u}$.
2) Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$, on explicitera la fonction limite.
3) Montrer que la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}^+$.
4) Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[1; +\infty[$.