S_3 M-MI-MP-ENSI
9 janvier 2009
Durée 3 heures

UNIVERSITÉ de Cergy-Pontoise

Examen : Séries

Calculatrice et document sont interdits.
Barème indicatif : 7+5+13

Exercice 1

1) Soit f la fonction de période 2π, impaire sur $[-\pi, \pi]$, telle que $f(x) = \pi - x$ sur $]0, 2\pi[$.

a. Dessiner le graphe de f.

b. Calculer la série de Fourier de f.

c. Montrer que $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin n}{n} = \frac{\pi - 1}{2}$, en justifiant ce calcul.

2) Soit g la fonction de période 2π, impaire sur $[-\pi, \pi]$, telle que

$$g(x) = (\pi - 1)x \quad \text{sur }]0, 1], \text{ et } g(x) = \pi - x \quad \text{sur }]1, \pi].$$

a. Dessiner le graphe de g.

b. Montrer sans calcul que la série de Fourier de g converge normalement sur $\mathbb{R}$ et a pour somme g.

c. Calculer la série de Fourier de g. Retrouver à l'aide de ces coefficients, la convergence normale montrée dans la question précédente.

3) En utilisant les questions précédentes, montrer que

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin n}{n} = \sum_{n\geq 1} \left(\frac{\sin n}{n}\right)^2 = \frac{\pi - 1}{2}.$$

Exercice 2

1) Déterminer les développements en série entière des fonctions définies par $\dfrac{1}{1-x}$ et $\dfrac{1}{1-2x}$, on précisera pour quelles valeurs de x ces développements sont valables.
2) En déduire, à l'aide d'une décomposition en élément simple, le développement en série entière de la fonction définie par $\dfrac{-3+4x}{1-3x+2x^2}$.
3) Préciser le domaine de définition de la fonction f définie par

$$f(x) = \ln(1 - 3x + 2x^2).$$

4) Déduire des questions précédentes le développement en série entière de la fonction f au voisinage de 0 et préciser les x pour lesquels ce développement est valable.

Exercice 3

Soit $\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall k, n \in \mathbb{N},\ u_k(t) = \dfrac{(-1)^k}{2k+1+t}$

Préambule : Énoncer le théorème des séries alternées, en précisant une majoration du reste d'ordre N.
Partie 1 :

a. Soit $t \in \mathbb{R}_+$ fixé, montrer que la série numérique $\sum |u_k(t)|$ diverge.

Veuillez tourner la page s'il vous plaît

b. Soit $t \in \mathbb{R}_+$ fixé, montrer que la série numérique $\sum u_k(t)$ converge.

Dans la suite on note $\sigma(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t)$ sa somme.

c. Montrer que la série de fonctions $\sum u_k$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.

d. Montrer que la série de fonctions $\sum u_k$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

e. Montrer que la fonction σ définie sur $\mathbb{R}_+$ est continue.

Partie 2 : Soit $t \in \mathbb{R}_+$ fixé dans toute cette partie et soit la série entière $\sum_{k\geq 0} u_k(t) y^k$. La variable de cette série entière est donc y. (t est un paramètre)

a. Montrer que son rayon de convergence $R(t)$ est égal à 1.

b. Montrer que cette série converge uniformément sur $[0, 1]$. On note pour $y \in [0, 1]$, $S_t(y) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) y^k$.

c. Montrer que la fonction $y \to S_t(y)$ est continue sur $[0, 1]$ et que $\lim_{y\to 1^-} S_t(y) = \sigma(t)$.

Partie 3 :

a. Écrire le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction $\frac{1}{1+x^2}$.

b. Quel est le rayon de convergence de la série entière trouvée ?

c. La série entière converge-t-elle en $x = 1$?

d. Montrer que pour $t \geq 0$ et $0 < y < 1$ on a

$$\int_0^y \frac{x^t}{1+x^2} \,\mathrm{d}x = y^{1+t} S_t(y^2).$$

e. En déduire que $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \int_0^1 \frac{x^t}{1+x^2} \,\mathrm{d}x = \sigma(t)$.

f. En déduire que $\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

g. Déduire de différentes questions du problème que :

$$\lim_{t\to 0^+} \int_0^1 \frac{x^t}{1+x^2} \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x$$