Mathématiques - S3- Université de Cergy - 2007-2008

Séries: Partiel 1 (1h30)

Exercice 1:
1) montrer que la série $\sum_{k\geq 1}(1-\frac{1}{k^2})^{k^2}$ diverge.
2) montrer que la série $\sum_{k\geq 1}(1-\frac{1}{k^2})^{k^3}$ converge.

Exercice 2:
1) montrer que la série $\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}+x}$ converge ponctuellement sur $[0,\infty[$.
2) montrer que cette série converge uniformément sur $[0,\infty[$.

Exercice 3:
On fixe $\alpha \geq 0$. Soit la série $\sum_{k\geq 1}u_k(x)$ où $u_k(x)=\frac{x}{k^\alpha(1+kx^2)}, x\geq 0$.
1) Soient $\alpha=0$ et $x>0$; montrer que la série diverge. **On supposera désormais** $\alpha>0$. Montrer que la série converge alors ponctuellement sur $[0,\infty[$. On note $f(x)$ sa somme.
2) Préciser pour quelles valeurs de α la série converge normalement sur $[0,\infty[$. (On calculera $\sup_{x\geq 0}u_k(x)$).
3) Soit $0<b<1$. Préciser pour quelles valeurs de α la série converge normalement sur $[b,\infty[$.
4) Montrer que f est continue sur $]0,\infty[$ si $\alpha>0$, sur $[0,\infty[$ si $\alpha>\frac{1}{2}$.
5) (**Facultatif**) Soit $0<\alpha\leq\frac{1}{2}$. On veut montrer que $f(x)\nrightarrow f(0)=0$ lorsque $x\to 0^+$.

a) montrer que $f(x)\geq\sum_{k=1}^{n-1}u_k(x)\geq x\int_1^n\frac{dt}{t^\alpha(1+tx^2)}, x>0$.

b) en faisant le changement de variable $u=tx^2$, exprimer le terme de droite sous la forme $x^{2\alpha-1}\varphi_n(x)$.

c) montrer que $\varphi_n(\frac{1}{\sqrt{n}})\geq 1, n\geq 2$.

d) conclure que $f(\frac{1}{\sqrt{n}})\nrightarrow_{n\to\infty} 0$.