Université de Cergy - 2007-2008 - Mathématiques- S_3

Examen de deuxième session: Séries

Exercice 1

Soit la fonction $f(x) = |\sin x|, x \in \mathbb{R}$.
1) Montrer que f est en tout point la somme de sa série de Fourier.
2) Calculer les coefficients de Fourier de la fonction f. (On rappelle la formule $\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$).
3) Montrer que la série $1 + \sum_{k \geq 1}(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k-1})$ converge et calculer sa somme.
4) En déduire que

$$|\sin x| = \frac{4}{\pi} \sum_{k \geq 1} (\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}) \sin^2 kx, x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2

Soit $F(x) = \int_x^1 \frac{1-\cos t}{t} dt$.
1) a) Montrer que F est définie en 0 et sur $\mathbb{R}$.
b) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser sa dérivée F'.
2) Donner le développement en série entière en 0 de la fonction définie par $f(t) = \frac{1-\cos t}{t}$ sur $\mathbb{R}^*$ et $f(0) = 0$. En préciser le rayon de convergence.
3) En déduire le développement en série entière en 0 de F et son rayon.

Exercice 3

1) Discuter suivant les valeurs de $\alpha > 0$ la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{n^\alpha}$, puis celle de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(1+Cn)}{n^\alpha}$ où $C > 0$ est une constante.
2) a) On rappelle que, pour $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$, on a $2t \leq \sin \pi t \leq \pi t$. En déduire un encadrement de

$$u_n(\alpha) = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{1 + n^\alpha \sin \pi t}, n \geq 1.$$

b) Donner, suivant les valeurs de $\alpha > 0$, la nature de la série $\sum_{n \geq 1} u_n(\alpha)$.
3) a) Quelle est la relation entre $u_n(\alpha)$ et $v_n(\alpha) = \int_0^1 \frac{dt}{1+n^\alpha \sin \pi t}$?
b) Montrer que $v_n(\alpha) = \int_{n-1}^n \frac{dt}{1+n^\alpha |\sin \pi t|} = \int_n^{n+1} \frac{dt}{1+n^\alpha |\sin \pi t|}$.
3) En déduire, suivant les valeurs de $\alpha > 0$, la nature de l'intégrale

$$I(\alpha) = \int_0^\infty \frac{dt}{1 + t^\alpha |\sin \pi t|}.$$