Université de Cergy - 2007-2008 - Mathématiques- S_3

Examen: Séries

Exercice 1

1) a) Calculer $\lim_{y\to 1^-}(\frac{1}{y}-1)\ln(1-y)$. Montrer que $\lim_{y\to 1^-}\ln(\frac{1+y}{1-y})+\frac{\ln(1-y^2)}{y}=2\ln 2$.

b) Soient les fonctions $\ln(1+y), \ln(1-y)$ et $\ln(\frac{1+y}{1-y})$. Ecrire leurs développements en série entière en 0, et préciser leurs rayons.

2) Soit la série entière $\sum\limits_{n\geq 0}\frac{x^n}{(n+1)(2n+1)}$. Quel est son rayon de convergence? Montrer que cette série converge normalement sur $[-1,1]$. Sa somme $S(x)$ est-elle continue sur $[-1,1]$?

3) a) Montrer que $S(x)=2\sum\limits_{n\geq 0}\frac{x^n}{2n+1}-\sum\limits_{n\geq 0}\frac{x^n}{n+1}$ sur $[0,1[$.

b) En utilisant 1) calculer $S(x)$ sur $]0,1[$.

c) En déduire que $\sum\limits_{n\geq 0}\frac{1}{(n+1)(2n+1)}=2\ln 2$.

Exercice 2

Soit f la fonction $2\pi-$périodique définie par $f(x)=1$ si $-\pi<x\leq 0$ et $f(x)=1-\frac{x}{\pi}$ si $0<x\leq\pi$.

1) Dessiner le graphe de f, et celui de f' sur son domaine de définition.

2) Montrer que les coefficients de Fourier réels de f sont

$$a_{2k}=0, a_{2k+1}=\frac{2}{\pi^2(2k+1)^2}, k\geq 0,\ b_n=\frac{(-1)^n}{n\pi}, n\geq 1.$$

3) En déduire, en justifiant la réponse, que

a) $\sum\limits_{k\geq 0}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

b) $\sum\limits_{k\geq 1}\frac{1}{(2k+1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$.(On rappelle $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$, qui se déduit facilement de a)).

Exercice 3

Pour $n\geq 1$ on pose $f_n(x)=\frac{\sin nx}{\sin x}, x\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

1) a) Calculer $\lim_{x\to 0}f_n(x)$ et $\lim_{x\to\pi}f_n(x)$.

b) En déduire que f_n se prolonge en fonction $\widetilde{f_n}$ continue sur $\mathbb{R}$, paire, $2\pi-$périodique (considérer d'abord le prolongement à $[-\pi,\pi]$).

c) Préciser f_1, f_2, puis exprimer f_n en fonction de $f_{n-1}, n \geq 1$. En déduire par récurrence que $\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\widetilde{f_n}(x)\right| \leq n$.

2) On fixe désormais $0 < b < 1$ et on considère la série de fonctions

$$\sum_{n\geq 1} b^n \widetilde{f_n}.$$

a) Montrer que cette série converge normalement sur $\mathbb{R}$. On note F sa somme.

b) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$, $2\pi-$périodique.

c) Pourquoi la série de Fourier de F est-elle de la forme $\sum_{k\geq 0} a_k \cos kx$? Montrer (sans calculs) que $a_k \to_{k\to\infty} 0$.

3) On rappelle que $2\sin a \sin c = -\cos(a+c) + \cos(a-c)$. On note

$$G(x) = \sin x F(x).$$

a) Donner les coefficients de Fourier de la fonction G, en justifiant la réponse.

b) Exprimer ces coefficients en fonction des a_k.

c) En considérant $\sum_{n\geq 1, impair} b^n$, puis $\sum_{n\geq 2, pair} b^n$, en déduire que $a_0 = \frac{b}{1-b^2}$ et $a_1 = \frac{2b^2}{1-b^2}$. (Utiliser a) et b)).

d) En déduire que $a_k = \frac{2b^{k+1}}{1-b^2}, k \geq 1$.

4) (facultatif) Montrer que $F(x) = \frac{b}{1-b^2}(1 + 2\sum_{k\geq 1} b^k \cos kx)$, en justifiant la réponse.