Mathématiques - S_3- Université de Cergy - 2006-2007

Séries: Partiel 1

Exercice 1:

Soit la suite de fonctions définie pour $x \geq 0$ par

$$f_n(x) = n^2 x e^{-nx}, n \geq 1.$$

a) Montrer que cette suite converge ponctuellement sur $[0, \infty[$ et préciser sa limite f.
b) Montrer que cette suite ne converge pas uniformément sur $[0, \infty[$.
c) Montrer que, pour tout $a > 0$, cette suite converge uniformément sur $[a, \infty[$.
d) Soient $0 \leq a < b$. Calculer $I_n = \int_a^b f_n(x)dx$ et déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\geq 1}$. Comparer à $\int_a^b f(x)dx$ en distinguant les cas $a = 0$ et $a > 0$. Quel théorème du cours cela évoque-t-il?

Exercice 2:
a) Soit la série de terme général $u_n(x) = (-1)^n x^{2n}$. Montrer que cette série converge normalement sur $[0, a]$ où $0 < a < 1$. Préciser sa somme $S(x) = \sum_{n\geq 0} u_n(x)$ sur $[0, a]$.
b) Montrer que la série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ converge uniformément sur $[0, 1]$. En utilisant a) préciser sa somme $T(x)$ sur $[0, a]$, puis sur $[0, 1[$, et sur $[0, 1]$.
c) Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$ converge, puis que sa somme σ est $\int_0^1 T(x)dx$. En déduire que $\sigma = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$.

Exercice 3:
a) Soit la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin n}{n^\alpha}$. Montrer qu'elle converge absolument si $\alpha > 1$.
b) Montrer qu'elle converge si $\alpha > 0$ et diverge si $\alpha = 0$.
c) Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \sin n(\frac{1}{n^\alpha+\cos n} - \frac{1}{n^\alpha})$ converge absolument si $\alpha > \frac{1}{2}$. En déduire que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin n}{n^\alpha+\cos n}$ converge si $\alpha > \frac{1}{2}$.

La suite est facultative.

d) Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin n \cos n}{n^{2\alpha}}$ converge si $\alpha > 0$.
e) Montrer pour $|y| < \frac{1}{2}$ l'inégalité $\left|\frac{1}{1+y} - 1 + y\right| \leq 2y^2$.
f) En déduire que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin n}{n^\alpha+\cos n}$ converge si $\alpha > \frac{1}{3}$. (L'écrire comme somme de trois séries).