Université de Cergy - 2006-2007 - Mathématiques- S_3

Examen: Séries

Problème 1 (les questions 1 à 3 sont indépendantes).

On note $0! = 1$. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels telle que la série $\sum_{n\geq 0} |a_n|$ converge.

1) a) Soit la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} a_n t^n$. Montrer que son rayon de convergence est infini. On note $g(t)$ sa somme.

b) Soit $T > 0$. Montrer que

$$\int_0^T e^{-t} g(t) dt = \sum_{n\geq 0} a_n \int_0^T e^{-t} \frac{t^n}{n!} dt.$$

2) On pose $S_n(T) = \sum_{k=0}^{n} \frac{T^k}{k!}$, $n \geq 1$.

a) Vérifier que $0 \leq e^{-T} S_n(T) \leq 1$ si $T \geq 0$, et que $e^{-T} S_n(T) \rightarrow_{y\rightarrow\infty} 0$.

b) Montrer, par récurrence sur n, que, pour $T > 0$,

$$\int_0^T e^{-t} \frac{t^n}{n!} dt = 1 - e^{-T} S_n(T).$$

3) Soit $(u_n(T))_{n\geq 0}$ une suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$. On suppose $0 \leq u_n(T) \leq 1$ pour $n, T \geq 0$ et on suppose que, pour tout n, $u_n(T) \rightarrow_{T\rightarrow\infty} 0$.

a) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} |a_n| u_n(T)$ converge pour $T > 0$. On note $f(T)$ sa somme.

b) Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que $0 \leq \sum_{n\geq N+1} |a_n| \leq \varepsilon$.

c) En écrivant $f(T) = \sum_{n=0}^{N} + \sum_{n\geq N+1}$ pour un choix convenable de N, montrer que $f(T) \rightarrow_{T\rightarrow\infty} 0$.

4) a) Montrer que

$$\left| \int_0^T e^{-t} g(t) dt - \sum_{n\geq 0} a_n \right| \leq \sum_{n\geq 0} |a_n| \, e^{-T} S_n(T).$$

b) En utilisant 3), conclure que

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-t}g(t)dt = \sum_{n\geq 0} a_n.$$

Problème 2 (les questions **B**-1), 2) sont indépendantes de **A**).

Soit f la fonction $2\pi-$périodique vérifiant $f(x) = \left|\sin\frac{x}{2}\right|$ sur $[-\pi, \pi[$.

A- 1) Tracer le graphe de f sur $\mathbb{R}$ et calculer f' lorsque cette dérivée existe.

2) Calculer les coefficients de Fourier réels de f.

3) a) En quels sens cette série converge-t-elle (ponctuellement, uniformément, normalement sur $\mathbb{R}$, en norme $L^2([-\pi,\pi], \frac{dx}{2\pi})$)?

b) Converge-t-elle vers f? Justifier les réponses.

B- Soit la série de fonctions $\frac{1}{\pi}(\frac{4}{3}\sin x + ... + \frac{n}{n^2-\frac{1}{4}}\sin nx + ...)$.

1) Montrer que cette série converge ponctuellement sur $\mathbb{R}$. On note S sa somme. Vérifier que S est impaire.

2) Montrer que cette série converge uniformément sur $[\varepsilon, \pi]$ $(0 < \varepsilon < 1)$.

3) Préciser (en justifiant) la somme S sur $[\varepsilon, \pi]$, puis sur $]0, \pi]$, puis sur $[-\pi, \pi]$.

4) Tracer le graphe de S sur $\mathbb{R}$.