Université de Cergy - M3 B -2005-2006

Contrôle continu de Mathématiques 1 (1h45)

Exercice 1

a) Montrer que la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{\ln n}, n \geq 2$, converge.

b) Montrer la convergence de la série de terme général $v_n = \frac{1}{n(\ln n)^2}, n \geq 2$ (on comparera les sommes partielles à des intégrales).

c) Montrer que la série de terme général $w_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n+(-1)^n)}, n \geq 2$, converge (on montrera que $|w_n - u_n|$ est équivalent à v_n).

Exercice 2

a) Pour quelles valeurs de α réel la série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge-t-elle? On note alors $S(\alpha)$ sa somme.

b) Montrer que $S(\alpha+1) \leq \frac{1}{2}S(\alpha)$ pour $\alpha > 1$.

c) En déduire que la série $\sum_{k\geq 2} \sqrt{k}S(k)$ est convergente.

Exercice 3

On pose $f_n(x) = \cos(n\alpha x)e^{-nx}, x \geq 0, n \geq 1$.

a) Montrer que cette suite de fonctions converge ponctuellement sur $[0, \infty[$ et préciser sa limite.

b) Montrer que cette suite converge uniformément sur $[a, \infty[$, pour tout $a > 0$.

c) Cette suite converge-t-elle uniformément sur $[0, 1]$? sur $]0, 1]$?

Exercice 4

a) Soit a un réel fixé. Montrer que la série de terme général $u_n = \frac{a^n}{1-a^n}, n \geq 1$, converge si $0 \leq a < 1$ et diverge si $|a| > 1$.

b) En déduire que la série de fonctions de terme général $u_n(x) = \frac{x^n}{1-x^n}, n \geq 0$, converge normalement sur $[-a, a]$ pour tout $a \in]0, 1[$.

c) Montrer que $S(x) = \sum_{n\geq 1} u_n(x)$ est continue sur$]-1, 1[$.

d) Soit $a \in]0, 1[$, fixé. Vérifier que

$$\int_n^{n+1} \frac{a^t}{1-a^t}dt \leq u_n(a) \leq \int_{n-1}^{n} \frac{a^t}{1-a^t}dt, n \geq 2,$$

et en déduire un encadrement de $S_N(a) = \sum_{n=2}^{N} u_n(a)$ par des intégrales.

e) (facultatif) (i) Calculer $\int_\alpha^A \frac{a^t}{1-a^t}dt$, pour $0 < a < 1$ fixé et $\alpha < A$. Montrer que $\lim_{A\to\infty} \int_\alpha^A \frac{a^t}{1-a^t}dt = \frac{\ln(1-a^\alpha)}{\ln a}$.

(ii) Montrer que

$$\frac{\ln(1-a^2)}{\ln a} \sim_{a\to 1^-} \frac{\ln(1-a)}{\ln a} \sim_{a\to 1^-} \frac{\ln(1-a)}{1-a}.$$

(iii) Conclure que $S(a) = \sum_{n\geq 1} u_n(a) \sim_{a\to 1^-} \frac{\ln(1-a)}{1-a}$.