Université de Cergy- 2005-2006- Mathématiques

Examen de rattrapage (2h)

Exercice 1

On considère les fonctions définies sur $[0, 2\pi[$ par $f(t) = \cos\frac{t}{2}, g(t) = 2\sin\frac{t}{2}$, et on les prolonge sur $\mathbb{R}$ en fonctions de période 2π.

1) Tracer le graphe de ces fonctions. Sont-elles continues sur $\mathbb{R}$?

2) Enoncer le théorème de Dirichlet. S'applique-t-il à f, g?

3) a) Calculer les séries de Fourier de f, g.On vérifiera que celle de f est de la forme $\sum_{n\geq 1} b_n \sin nt$ et celle de g de la forme $a - \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} b_n \cos nt$. (On rappelle la formule $2\cos a \sin b = \sin(a+b) - \sin(a-b)$).

b) (facultatif) Pouvait-on prévoir ce résultat? (Montrer que $g' = f$ sur $]0, 2\pi[$ et que la série de Fourier de f converge uniformément sur $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ pour tout $0 < \varepsilon < 1$).

4) Vérifier que $-4f' = g$ sur $[0, 2\pi[$ mais qu' on n'obtient pas la série de Fourier de g en dérivant terme à terme celle de $-4f$.

Exercice 2

Soit α un réel fixé. On considère la série entière

$$\sum_{n\geq 1} (Arctg\, n^\alpha) x^n,$$

on note R_α son rayon de convergence.

1) Dessiner le graphe de la fonction $Arctg\, x$.

2) Montrer que $R_\alpha \geq 1$.

3) Montrer que $R_\alpha = 1$. (On discutera suivant que $\alpha \geq 0$ ou $\alpha < 0$).

4) Etude en $x = \pm 1$: Discuter suivant les valeurs de α

a) la convergence de $\sum_{n\geq 1} (Arctg\, n^\alpha)$

b) la convergence de $\sum_{n\geq 1} (-1)^n (Arctg\, n^\alpha)$.

Exercice 3

Soit $0 < a < 1$ fixé. Soit

$$S(y) = \sum_{n\geq 1} \frac{a^n}{n + 1 + y}.$$

1) a) Montrer que cette série converge normalement sur $[-1, \infty[$, puis que S est définie et continue sur $[-1, \infty[$.

b) Montrer que S est dérivable sur $[-1,\infty[$ et exprimer S' comme somme d'une série de fonctions.

c) Montrer que S est dérivable à l'ordre k ($k \geq 1$) sur $[-1,\infty[$ et exprimer $S^{(k)}$ comme somme d'une série de fonctions.

2) Montrer que

$$\left|\frac{S^{(k)}(y)}{k!}\right| \leq \frac{a}{1-a}\frac{1}{(2+y)^{k+1}} \rightarrow_{k\rightarrow\infty} 0 \, si \, y > -1.$$

3) a) On applique à S sur $[0,y]$ la formule de Taylor-Lagrange. Soit $R_k(y)$ le reste d'ordre k dans cette formule. Montrer que $R_k(y) \rightarrow_{k\rightarrow\infty} 0$ si $y \in]-1,1[$.

b) En déduire que S est développable en série entière en 0, et que cette série a un rayon de convergence ≥ 1.

4) Soit $T(y) = \sum\limits_{n\geq 0} \frac{a^n}{n+1+y} = \frac{1}{1+y} + S(y)$. Conclure que T est développable en série entière en 0, et que cette série a un rayon de convergence égal à 1.