Université de Cergy - 2005-2006 M3 (Séries)

Examen (3h)

Exercice 1

Soit $f(x) = e^{-2x^2} \int_0^x e^{2t^2} dt = e^{-2x^2} F(x), x \in \mathbb{R}$.

1) a) Montrer que F est développable en série entière en 0, et que cette série a un rayon de convergence infini.

b) Même question pour f.

2) Montrer que $f'(x) = 1 - 4xf(x), x \in \mathbb{R}$.

3) En déduire les coefficients du développement en série entière de f.

Exercice 2

1) Soit la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^2}$.

a) Quel est son rayon de convergence?

b) Montrer que sa somme $g(x)$ est définie et continue sur $[-1, 1]$.

c) Montrer que g est dérivable sur $]-1, 1[$. Calculer g' à l'aide de fonctions usuelles.

2) Soit la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}(x^n + (1-x)^n)$.

a) Montrer que cette série converge si et seulement si $0 \leq x \leq 1$. (Si $x \notin [0, 1]$, on pourra montrer que $u_{2n}(x) \to_{n\to\infty} \infty$).

b) Pour $0 \leq x \leq 1$, exprimer la somme f de cette série en fonction de g; en déduire que f est continue sur $[0, 1]$, dérivable sur $]0, 1[$ et calculer f'.

c) Montrer que $f(x) = -Ln(x)Ln(1-x) + C, 0 < x < 1$.

d) Montrer que $C = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 3

Soit f la fonction de période 2π définie par $f(x) = x$ si $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $f(x) = \pi - x$ si $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, $f(x) = -x - \pi$ si $x \in]-\pi, -\frac{\pi}{2}]$.

1) a) Dessiner le graphe de f.

b) Montrer que la série de Fourier de f est de la forme $\sum_{n\geq 1} b_n \sin nx$ et montrer que cette série converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers f.

2) Calculer les coefficients b_n.

3) Déduire de 1) et 2) que $\sum_{k\geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

4) Soit $P(x) = \sum_{|j|\le J} a_j e^{i\lambda_j x}$ où $J \in \mathbb{N}^*$, et $a_j, \lambda_j \in \mathbb{R}$. On suppose de plus $|\lambda_j| \le \frac{\pi}{2}, |j| \le J$.

a) Vérifier que $P'(x) = i \sum_{|j|\le J} a_j f(\lambda_j) e^{i\lambda_j x}$.

b) En déduire, en utilisant 1) et 2) que

$$P'(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{k\ge 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} (P(x+2k+1) - P(x-2k-1)).$$

c) Conclure que $\|P'\|_\infty \le \frac{\pi}{2} \|P\|_\infty$ (où $\|P\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |P(x)|$).

5) (facultatif) Soit $P(x)$ comme en 4), mais on ne suppose plus $|\lambda_j| \le \frac{\pi}{2}$. On pose $\Lambda = \max_{|j|\le J} |\lambda_j|$. Montrer l'inégalité de Bernstein

$$\|P'\|_\infty \le \Lambda \|P\|_\infty .$$

(on pourra écrire $\Lambda = \frac{\pi}{2}\Lambda'$ et $e^{i\lambda_j x} = e^{i\frac{\lambda_j}{\Lambda'}\Lambda' x}$).

Exercice 4

Rappel (inégalité de Cauchy-Schwarz): pour f, g continues sur $[-\pi, \pi]$,
$\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\frac{dt}{2\pi}\right| \le \|f\|_2 \|g\|_2$ où $\|f\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \frac{dx}{2\pi}$.

Soit f une fonction 2π périodique, continue sur $\mathbb{R}$, telle que $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{dx}{2\pi} = 0$.

On pose $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

1) a) Montrer que F est 2π périodique, et préciser sa dérivée.

b) Montrer que $\widehat{f}(n) = in\widehat{F}(n), n \in \mathbb{Z}$.

2) Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \left|\widehat{F}(n)\right|^2 \le \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \left|\widehat{f}(n)\right|^2$, puis que $\left\|F - \widehat{F}(0)\right\|_2^2 \le \|f\|_2^2$.

3) On suppose en outre que F est à valeurs réelles et on note $G = F - \widehat{F}(0)$.

a) Vérifier que $\widehat{G}(0) = 0$ et en déduire l'existence de x_0 tel que $G(x_0) = 0$.

b) Montrer que $G^2(x) = 2\int_{x_0}^{x} G(t)f(t)dt, x \in \mathbb{R}$. (Etudier $(G^2)'$).

c) En déduire que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |G(x)|^2 \le 2\int_{x_0}^{x_0+2\pi} |f(t)G(t)|\, dt \le 4\pi \|f\|_2 \|G\|_2 .$$