Université de Cergy-Pontoise **Durée 4 heures**
Mathématiques L2 **Mr Hebey**
Algèbre Bilinéaire et Intégration - Janvier 2015

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés. Le barême est donné à titre indicatif. Toute note supérieure à 20 sera ramenée à 20.

Questions de cours: (1) (1pt) Enoncer le théorème du rang.
(2) (1pt) Enoncer le théorème de Sylvester.
(3) (1pt) Enoncer le théorème de diagonalisation des endomorphismes symétriques.

Exercice 1: Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On note $f, g \in End(E)$ les endomorphismes de E définis par

$$f\big(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3\big) = \big(-x_1 + x_2 + x_3\big)e_1 + \big(x_1 + 2x_2 - x_3\big)e_2 + \big(x_1 - x_2 + x_3\big)e_3$$
$$g\big(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3\big) = \big(2x_1 - 2x_2 + x_3\big)e_1 + \big(2x_1 - 3x_2 + 2x_3\big)e_2 - \big(x_1 - 2x_2\big)e_3$$

pour tous $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. On veut montrer danse cet exercice que f et g sont diagonalisables. On ne demande pas de les diagonaliser.
(1) (1pt) Ecrire la matrice de représentation $M_{\mathcal{BB}}(f)$ de f dans $\mathcal{B}$. Peut-on déjà affirmer que f est diagonalisable ? Pourquoi ?
On se propose maintenant de montrer que g est elle aussi diagonalisable.
(2) (2,5pts) Ecrire la matrice de représentation $M_{\mathcal{BB}}(g)$ de g dans $\mathcal{B}$, calculer le polynôme caractéristique de g, et déterminer les valeurs propres de g.
(3) (2,5pts) Déterminer les sous-espaces propres de g par le calcul de bases pour ces espaces propres. Montrer que g est diagonalisable.

Exercice 2: Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On note B la forme bilinéaire sur E définie par

$$B(x,y) = x_1y_1 + 6x_2y_2 + 56x_3y_3 - 2(x_1y_2 + x_2y_1) + 7(x_1y_3 + x_3y_1) - 18(x_2y_3 + x_3y_2)$$

pour tous $x = \sum_{i=1}^3 x_ie_i$ et $y = \sum_{i=1}^3 y_ie_i$.
(1) (1pt) Ecrire la matrice $M_{\mathcal{B}}(B)$ de B dans $\mathcal{B}$.
(2) (1pt) Montrer que les vecteurs $\tilde{e}_1 = e_1$, $\tilde{e}_2 = 2e_1 + e_2$, et $\tilde{e}_3 = -3e_1 + 2e_2 + e_3$ forment une base $\tilde{\mathcal{B}}$ de E.
(3) (1pt) Ecrire la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\tilde{\mathcal{B}}$. En déduire la matrice $M_{\tilde{\mathcal{B}}}(B)$ de B dans $\tilde{\mathcal{B}}$.
(4) (1pt) Si Q est la forme quadratique associée à B, donner les expressions de Q dans les bases $\mathcal{B}$ et $\tilde{\mathcal{B}}$. Que vaut la signature de Q ?

Exercice 3: Etudier la convergence des intégrales généralisées suivantes:

$$\text{(1pt) } I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{x+2}{x^3+1}dx\ ,\ \text{(1pt) } I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{x+3}{x^2+1}dx\ ,$$
$$\text{(1,5pt) } I_3 = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(x)}{x}dx\ ,\ \text{(1,5pt) } I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x}(x^2+2)}dx\ .$$

Justifier vos réponses.

Exercice 4: On considère, pour tout x réel, l'intégrale
$$F(x) = \int_0^{\pi/2} \cos(x \sin t) dt \ .$$
(1) (1,5pt) Montrer que la fonction F est continue sur $\mathbb{R}$.
(2) (1,5pt) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$.

Exercice 5: (3pts) Calculer les intégrales multiples
$$I = \int\int_{D_1} \cos(x+y) dxdy \text{ et } J = \int\int_{D_2} x^2 y dxdy$$
où $D_1 \subset \mathbb{R}^2$ est donné par $D_1 = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \le x \le \pi \text{ et } 0 \le y \le \frac{\pi}{2}\Big\}$, et $D_2 \subset \mathbb{R}^2$ est donné par $D_2 = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \le y \le x \le 1\Big\}$.