**L2-S3 M-MI-MP-ENSI**
**06 Janvier 2008**
**Analyse dans $\mathbb{R}^n$**

UNIVERSITÉ
de Cergy-Pontoise

# Examen

**Durée: 3h. Aucun document ni matériel autorisé.**

**Exercice 1.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = (x + y)^3 + 3xy$.

**a)** Déterminer les points critiques de $f$

**b)** Parmi ces points, lesquels sont des extrema locaux de $f$?

**c)** Est-ce que $f$ possède un maximum global ou un minimum global sur $\mathbb{R}^2$?

**d)** On considère maintenant la fonction $f$ définie uniquement sur $A = [-1, 1] \times [-1, 1]$.

- **i)** Représenter graphiquement l'ensemble $A$ et justifier que $f$ admet un minimum global et un maximum global sur $A$.
- **ii)** Déterminer ce minimum global et ce maximum global de $f$ sur $A$ (on pourra étudier rapidement les fonctions $g(t) = (t - 1)^3 - 3t$ et $h(t) = (t + 1)^3 + 3t$ sur l'intervalle $I = [-1, 1]$).

**Exercice 2.** Soient $f_1$ et $f_2$ les fonctions de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définies par

$$f_1(x, y) = xy^3 + \sin(2x + y) - 3y \quad \text{et} \quad f_2(x, y) = -3\mathrm{e}^{x+2y} + x^2 y.$$

**a)** Rappeler la définition de la différentiabilité d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en un point $a$.

**b)** Justifier que $f_1$ et $f_2$ sont différentiables au point $a = (0, 0)$ et donner les différentielles de $f_1$ et $f_2$ en ce point.

**c)** Soit $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Montrer que $f$ est inversible localement en $a = (0, 0)$.

**Exercice 3.** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \frac{x^4 + \alpha y^3}{x^2 + y^2} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \qquad f(0, 0) = 0.$$

Déterminer pour quelles valeurs du paramètre $\alpha$ la fonction $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

**Exercice 4.**

**a)** Enoncer la formule de Taylor à l'ordre 2 pour les fonctions de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

**b)** Donner le développement de Taylor (ou, ce qui revient au même, le développement limité) de la fonction $f(x, y) = 2x\mathrm{e}^{x+y} + \cos(x - y)$ à l'ordre 2 en $(0, 0)$.

**TSVP**

**Exercice 5.** On cherche toutes les fonctions $f$ de classe $C^1$ sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et telles que

$$\forall (x,y)\in ]0,+\infty[\times]0,+\infty[,\quad x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0. \qquad (E)$$

**a)** Soit $T=(T_1,T_2)\colon ]0,+\infty[\times]0,+\infty[\to]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ définie par $T(x,y)=\left(xy,\dfrac{x}{y}\right)$. Montrer que $T$ est une bijection de $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ dans $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ et déterminer $T^{-1}(u,v)$.
**b)** Pour toute fonction $f$ de classe $C^1$, on définit la fonction $g(u,v)=f\circ T^{-1}(u,v)$. Justifier rapidement que $g$ est de classe $C^1$, et montrer que $f$ vérifie $(E)$ si et seulement si $\dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v)=0$ pour tout $(u,v)\in ]0,+\infty[\times]0,+\infty[$.
**c)** Déterminer les solutions de l'équation $(E)$.

**Exercice 6.** Soit $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^d$ une fonction continue.
**a)** Rappeler la définition d'un ensemble compact de $\mathbb{R}^n$.
**b)** Rappeler la caractérisation de la continuité à l'aide des suites.
**c)** Soit $K\subset\mathbb{R}^n$, on définit l'ensemble $f(K)\subset\mathbb{R}^d$ par

$$f(K)=\{y\in\mathbb{R}^d\mid \exists x\in K \text{ tel que } y=f(x)\}.$$

Montrer que si $K$ est un ensemble compact de $\mathbb{R}^n$ alors $f(K)$ est un ensemble compact de $\mathbb{R}^d$.