Université de Cergy-Pontoise **Licence L2-Analyse dans $I\!R^n$**
Examen de Mathématiques **Mrs Bruneau, Godillon, Fang, Hebey, Mendy**
Durée 3 heures **Décembre 2007**

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1: (4pts) On considère la fonction réelle $f : I\!R^2 \to I\!R$ définie par

$$f(x,y) = \frac{x^2y^3}{x^2+y^2} \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0)$$
$$f(0,0) = 0.$$

Montrer que$f$ est de classe C^1 sur $I\!R^2$.

Exercice 2: (4pts) Soit $f : I\!R^2 \to I\!R$ la fonction réelle définie sur $I\!R^2$ par

$$f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + (5+x)(1+y^2)$$

Trouver les points critiques de f. Parmi ces points, lesquels sont des extremums locaux de f ? Par ailleurs, f possède-t-elle un maximum global ou un minimum global ?

Exercice 3: (4pts) Soit $f : I\!R^2 \to I\!R$ la fonction définie par

$$f(x,y) = 3x^2e^{xy} + xy^2 + \sin(x^2+7y^2) + 3x^4y^5$$

Ecrire la formule de Taylor (ou, ce qui revient au même, le développement limité) à l'ordre 2 de f en $(0,0)$.

Exercice 4: (4pts) Soit $f : I\!R^2 \to I\!R^2$ l'application définie par $f = (f_1, f_2)$, où les fonctions $f_1, f_2 : I\!R^2 \to I\!R$ sont données par

$$f_1(x,y) = 3x + ye^x + \sin(x^2y^3) + x^4y^2$$
$$f_2(x,y) = 5xe^y + 2y + x^3y^4.$$

Montrer que f est de classe C^1 sur $I\!R^2$ et écrire la matrice jacobienne de f au point $(0,0)$.

Exercice 5: (4pts) Soit $f : I\!R^n \to I\!R$ une fonction continue non constante. On suppose qu'il existe $a, b \in I\!R^n$ tels que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. On suppose aussi que $f(x) \to 0$ lorsque $\|x\| \to +\infty$ au sens où pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $R_\varepsilon > 0$ tel que $|f(x)| \leq \varepsilon$ si $\|x\| \geq R_\varepsilon$. Montrer que f possède un maximum et un minimum global sur $I\!R^n$.