Université de Cergy-Pontoise | **Licence L2-Analyse dans $I\!R^n$**
Examen de Mathématiques | **Mrs Bruneau, Duyckaerts, Fang, Hebey, Ye**
Durée 2 heures | **Juin 2007**

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.
Le barême est donné à titre indicatif.

Exercice 1: (5pts) Pour $q \geq 1$ un entier naturel non nul, on considère la fonction réelle $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par

$$\begin{aligned} &f(x,y) = \frac{x^2 y^q}{x^2+y^2} \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ &f(0,0) = 0. \end{aligned}$$

Pour quelles valeurs de q la fonction f est-elle continue sur $\mathbf{R}^2$? Pour quelles valeurs de q la fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbf{R}^2$?

Exercice 2: (5pts) Soient α et β deux réels strictement positifs tels que $1 + 2\alpha = \beta$. Soit de plus $f : I\!R^2 \to I\!R$ la fonction réelle définie sur $I\!R^2$ par

$$f(x,y) = x^2 + \alpha x^4 + 2\beta(1+x)y^2$$

Trouver les points critiques de f. Parmi ces points, lesquels sont des extremums locaux de f ? Par ailleurs, f possède-t-elle un maximum global ou un minimum global ?

Exercice 3: (5pts) Soit $f : I\!R^2 \to I\!R$ la fonction définie par

$$f(x,y) = 3x^2 e^{xy} + xy^2 + \sin(x^2+y^2)$$

Ecrire la formule de Taylor (ou, ce qui revient au même, le développement limité) à l'ordre 2 de f en $(0,0)$.

Exercice 4: (5pts) Soit $f : I\!R^2 \to I\!R^2$ l'application définie par $f = (f_1, f_2)$, où les fonctions $f_1, f_2 : I\!R^2 \to I\!R$ sont données par

$$\begin{aligned} &f_1(x,y) = 3x + ye^x + \sin(x^2y^3) + x^4y^2 \\ &f_2(x,y) = 5xe^y + 2y + x^3y^4. \end{aligned}$$

Montrer que f est de classe C^1 sur $I\!R^2$ et que f est inversible au voisinage du point $(0,0)$.