Université de Cergy-Pontoise — **Licence L2-Analyse dans $I\!R^n$**
Examen de Mathématiques — **Mrs Bruneau, Duyckaerts, Fang, Hebey, Ye**
Durée 3 heures — **Décembre 2006**

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés. Le barême est donné à titre indicatif. Toute note supérieure à 20 sera ramenée à 20.

Questions de cours.1: (1) (1pt) Donner la formule de différentiation pour des composées $g \circ f$ d'applications.
(2) (1pt) Enoncer le théorème d'inversion locale pour les applications.

Exercice 1: (3pts) Pour (p,q) un couple d'entiers naturels, on considère la fonction réelle $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{x^p y^q}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0)$$
$$f(0,0) = 0$$

avec la convention que si $p = 0$ alors $x^0 = 1$ pour tout x, et que si $q = 0$ alors $y^0 = 1$ pour tout y. Pour quelles valeurs de p et q la fonction f est-elle continue sur $\mathbf{R}^2$? Pour quelles valeurs de p et q la fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbf{R}^2$?

Exercice 2: (4pts) Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ la fonction réelle définie sur $\mathbf{R}^2$ par

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27$$

Trouver les points critiques de f. Parmi ces points, lesquels sont des extremums locaux de f ? Par ailleurs, f possède-t-elle un maximum global ou un minimum global ?

Exercice 3: (2pts) Soit $f : I\!R^2 \to I\!R$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \arctan(x^2) + 3xe^y + xy^2 + \sin(x+y^2)$$

Ecrire la formule de Taylor (ou, ce qui revient au même, le développement limité) à l'ordre 2 de f en $(0,0)$. On rappelle que $(\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ pour tout $x \in I\!R$.

Exercice 4: (3pts) Soit $f : I\!R^2 \to I\!R$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \frac{(x^2-y^2)xy}{x^2+y^2} + x^5y^2 + 6x - 3y + 2$$

si $(x,y) \neq (0,0)$, et $f(0,0) = 2$. Montrer que f est de classe C^1 sur $I\!R^2$. Etudier la différentiabilité seconde de f sur $I\!R^2$.

Exercice 5: (2pts) Soit $f : I\!R^2 \to I\!R^2$ l'application définie par $f = (f_1, f_2)$, où les fonctions $f_1, f_2 : I\!R^2 \to I\!R$ sont données par

$$f_1(x,y) = 4x + y + 5\sin(xy) + x^3y^2$$
$$f_2(x,y) = 2y + x + x^5y^4.$$

Montrer que f est de classe C^1 sur $I\!R^2$ et que f est inversible au voisinage du point $(1,0)$.

Exercice 6: (4pts) Soit $U = \{(x,y) \in I\!R^2, x > 0\}$ et $V =]0,\infty[\times]-\pi/2,\pi/2[$. On définit la fonction $\Psi : V \to I\!R^2$ par $\Psi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Montrer que Ψ est une application C^1, bijective de V sur U, et que $T = \Psi^{-1}$ vérifie

$$T(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2}, \arctan\frac{y}{x}\right)$$

En considérant $f = h \circ T$, trouver toutes les applications $f : U \to I\!R$ de classe C^1 telles que :

$$y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

pour tout $(x,y) \in U$.

Exercice Supplémentaire (3pts) Soit (E,d) un espace métrique. A savoir, E est un ensemble quelconque, et $d : E \times E \to \mathbf{R}^+$ est une application qui vérifie que pour tous $x,y,z \in E$, $d(x,y) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = y$, $d(x,y) = d(y,x)$, et l'inégalité triangulaire $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$. Etant donnée $(x_n)_n$ une suite de points de E, on dit que $(x_n)_n$ converge vers un point x de E si

$$\forall \epsilon > 0,\; \exists N \in \mathbf{N} \;/\; \forall n \geq N, d(x_n, x) < \epsilon$$

Par ailleurs, si (X, d_X) et (Y, d_Y) sont deux espaces métriques, et si $f : X \to Y$ est une application de X dans Y, on dit que f est continue en un point a de X si

$$\forall \epsilon > 0,\; \exists \eta > 0 \;/\; \forall x \in X,\; d_X(a,x) < \eta \;\Rightarrow\; d_Y(f(a), f(x)) < \epsilon$$

Montrer que f est continue en un point a de X si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n$ de points de X, la convergence de $(x_n)_n$ vers a entraîne la convergence de $(f(x_n))_n$ vers $f(a)$.