L2 MIPI
5 janvier 2026
Durée 2 heures

Examen séries

L'utilisation ou la consultation de téléphone est formellement interdite, les calculatrices, les téléphones et les objets connectés (montre, lunette, écouteurs,...) doivent être éteints, rangés dans un sac et déposés à l'avant de l'amphi : il est interdit d'en avoir un sur soi ou sur sa table durant l'épreuve. Les documents sont interdits.
Barème indicatif : 3+3+5+4+5

Exercice 1: Étudier la convergence des séries de termes généraux suivants :

$$a_n = \frac{n}{n^2+2n+1} \qquad b_n = \frac{\sin(n^3)}{1+2n+5n^4} \qquad c_n = \frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\sqrt{n}}$$

Exercice 2: Déterminer le rayon de convergence des séries entières :

$$\sum 5^n x^{2n} \qquad \sum \tfrac{n^5}{2^n} x^{n+1} \qquad \sum \left(1-\tfrac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$$

Exercice 3: Soit (f_n) la suite de fonctions définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in]0;1],\ f_n(t) = \frac{t^n \ln t}{n} \qquad \text{et} \qquad f_n(0) = 0$$

On admet que les fonctions f_n sont continues.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, étudier la fonction f_n et montrer que $\forall t \in [0;1],\ |f_n(t)| \leqslant \frac{1}{n^2}$.
2. La série de fonctions de terme général f_n converge-t-elle simplement ? normalement ? sur $[0;1]$.
3. Rappeler le développement en série entière de la fonction définie sur $[0;1[$ par $\ln(1-t)$.
4. En admettant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 t^n \ln t \; \mathrm{d}t = \frac{-1}{(n+1)^2}$ montrer que :

$$\int_0^1 \ln(t)\ln(1-t)\; \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}$$

Exercice 4: Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence infini, on note S sa somme. On suppose de plus que $S''(0) = 2$ et S est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$xy'' - y = 17x^2$$

1. Montrer que $a_2 = 1$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{2\}$, $(n+1)na_{n+1} - a_n = 0$ et que $a_3 = 3$.
3. En déduire les valeurs de a_0 et a_1.
4. Montrer que $\forall n \geq 3,\ a_n = \dfrac{36n}{(n!)^2}$.

Exercice 5 (Cours): On se propose de redémontrer le critère de Cauchy pour les séries à termes positifs.

On pourra utiliser en précisant explicitement qu'on l'utilise le théorème de comparaison des séries à termes positifs à savoir que pour des suites de réels (a_n) et (b_n) telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ si la série $\sum b_n$ converge alors la série $\sum a_n$ converge.
Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\lim (u_n)^{\frac{1}{n}} = l \in [0;1[$.

1. Démontrer en revenant à la définition de limite qu'il existe un rang N à partir duquel $(u_n)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{2}(1+l)$, on pourra proposer une représentation graphique du phénomène.
2. Soit $q \in]0;1[$, rappeler une démonstration de l'égalité : $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$
3. En déduire que la série $\sum q^n$ converge et retrouver sa somme.
4. A l'aide des questions précédentes, démontrer que la série $\sum u_n$ converge.