L2 MIPI
10 janvier 2025
Durée 2 heures

Examen séries

L'utilisation ou la consultation de téléphone est formellement interdite, les calculatrices, les téléphones et les objets connectés doivent être rangés dans un sac et éteints et déposés à l'avant de l'amphi : il est interdit d'en avoir un sur soi ou sur sa table. Les documents sont interdits. L'énoncé sera rendu dans la copie.
Barème indicatif : 4+6+6+4

Exercice 1 (Cours): Soit (α_n) une suite de réels,

1. Rappeler la définition d'une somme partielle d'une série de terme général α_n.
2. Démontrer que la suite des sommes partielles d'une série à termes positifs est croissante.
3. Soit (u_n) et(v_n) deux suites de réels positifs telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant v_n$, on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ redémontrer le résultat de cours suivant :

$$\text{Si la série } \sum v_n \text{ converge alors la série } \sum u_n \text{ converge.}$$

Exercice 2: Étudier la convergence des séries de termes généraux suivants :

$$a_n = n^2 + 1 \qquad c_n = \frac{\cos n}{1 + 3n^3} \qquad e_n = \frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}$$

$$b_n = \frac{n^3 + 2n + 5}{1 + 2n + 5n^4} \qquad d_n = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{3}}} \qquad f_n = \frac{n^4}{2^n}$$

Exercice 3: Soit la suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, (f_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{1}{3n^2 + x^2}$$

1. Montrer que la série de fonctions de terme général f_n converge normalement sur $\mathbb{R}$.
   Dans la suite, on note $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la somme de cette série.
2. Pour tout entier $n > 0$ fixé, étudier les variations, sur $\mathbb{R}$, de la fonction f_n'.
3. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n'$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
5. Montrer que pour tout $R > 0$, $\forall x \in]-R; R[, |f_n''(x)| \leqslant \frac{2}{9} \cdot \frac{n^2+R^2}{n^6}$
6. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
7. Sachant que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$, déterminer un DL_2 de S en 0.

Exercice 4: Soit (u_n) la suite de réels positifs définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$, et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (n+2)(n+1)u_{n+2} - 3(n+1)u_{n+1} + 2u_n = 0$$

On suppose que la série entière $\sum u_n x^n$ possède un rayon de convergence R strictement positif, et on note S sa somme sur $]-R, R[$.

1. Calculer u_2, $S(0)$, $S'(0)$ et $S''(0)$.
2. Montrer que S est solution de l'équation différentielle (E) : $y'' - 3y' + 2y = 0$.
3. Résoudre l'équation $r^2 - 3r + 2 = 0$ en déduire les solutions de (E) puis déterminer la fonction S.
4. Déterminer le développement en série entière $\sum a_n x^n$ de la fonction S ainsi trouvée.
5. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a_n$