Université de Cergy-Pontoise - Département Mathématiques

Licence 2 Mathématiques - Informatique - CUPGE

Examen : Séries numériques
Donné le 20-12-2023 (Durée 2h00)

Téléphones portables et tout document sont interdits

Le barème est donné à titre indicatif. Les élèves sont invités à porter une attention particulière à la rédaction.
La référence des questions doit obligatoirement être mentionnée.

EXERCICE 1 (5 points) Après avoir rappelé les définitions de convergence et de convergence absolue d'une série, déterminer si les séries suivantes sont absolument convergentes, puis si elles sont convergentes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}+2}$,
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^n}{(n^2+1)^n}$,
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n+2\sqrt{n}}$,
4. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.

EXERCICE 2 (5 points) Après avoir rappelé la définition du rayon de convergence d'une série entière, calculer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n}{4^n} z^n$,
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{e^n}{n!} z^n$,
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n^{3n} z^n$,
4. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} n\sin\left(\frac{1}{n}\right) z^n$.

EXERCICE 3 (6 points) On considère la série de fonctions de variable réelle $x \in]0,+\infty[$ définie par

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{x^2+xn^2}.$$

1. Montrer que cette série de fonctions converge simplement sur $]0,+\infty[$.
2. Montrer que pour tout $a > 0$, cette série de fonction converge normalement sur $[a,+\infty[$. Converge t'elle normalement sur $]0,+\infty[$?
3. Justifier pourquoi la somme $S :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ de cette série de fonction est bien définie, puis pourquoi celle-ci est continue sur $]0,+\infty[$.
4. Montrer que la somme $S :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

EXERCICE 4 (4 points) Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé, on considère la série

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)},$$

et on note $(u_n)_{n\geq 2}$ la suite de ses termes généraux.

1. Pour chaque valeur de $\beta \in \mathbb{R}$, calculer la limite de la suite $(n^\beta u_n)_{n\geq 2}$.
2. Montrer que la série converge absolument lorsque $\alpha > 1$, et qu'elle diverge lorsque $\alpha < 1$.
3. Calculer la dérivée de la fonction $f :]1,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie pour tout $t > 1$ par $f(t) = \ln(\ln(t))$, puis pour tout $N \in \mathbb{N}$, calculer la valeur de l'intégrale
$$\int_2^{N+1} \frac{1}{t\ln(t)}\,dt.$$
4. Montrer que la série diverge lorsque $\alpha = 1$.