CC Terminal de Séries - Durée 3h -

(Les documents, calculatrices, téléphones et objets connectés sont interdits)

Questions de cours. Vrai (V) ou Faux (F) ? Cocher la case appropriée : **la feuille est à rendre avec la copie** :

Proposition	V	F
1) Si $\forall n \geq 0,\ 0 \leq u_n \leq v_n$, on a : $\left(\sum u_n \text{ diverge } \Longrightarrow \sum v_n \text{ diverge}\right)$		
2) Si $\forall n \geq 0,\ u_n \geq 0$, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum u_n^2$ sont de même nature.		
3) Si $\forall n \geq 0,\ u_n \geq 0$, on a : $\left(\sum u_n \text{ converge si et seulement si } \exists M > 0 \,/\, \forall n \geq 0,\ \sum_{k=0}^{n} u_k \leq M\right)$.		
4) La série $\sum(u_n + v_n)$ converge si et seulement si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent.		
5) Si $\forall n \geq 0,\ u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge		
6) Si $u_n \sim v_n$, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.		

Exercice 1. Etudier la nature de chacune des séries suivantes. Préciser le cas échéant si on a convergence absolue ou semi-convergence.

$$a) \sum_{n\geq 1} \frac{2n^2+3}{n^4-5} \qquad b) \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2\left(\sqrt{2n^2+n+1}-\sqrt{2n^2-n+4}\right)} \qquad c) \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin\frac{1}{n}$$

$$d) \sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{n}{n^2+1} \qquad e) \sum_{n\geq 0} \frac{n^2+\sin(n)}{n^3+1} \qquad f) \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cos\left(\frac{1}{n}\right)$$ (On pourra s'aider ici d'un D.L.)

Exercice 2. On considère la série entière $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$ avec $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ pour tout $n \geq 1$.

1. Calculer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$.
2. Préciser si la série converge en R et en $-R$, puis déduire le domaine D de convergence simple de la série $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$. On notera $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ pour $x \in D$.
3. Rappeler pourquoi F est continue sur D.
4. Rappeler pourquoi F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-R, R[$. Exprimer F' comme la somme d'une série entière sur $]-R, R[$.
5. En déduire une expression explicite de F' puis de F sur $]-R, R[$.
6. Déduire de ce qui précède la somme de la série alternée $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Exercice 3. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ définies sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n+1}e^{-nx}$.

1) a- Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} f_n(0)$ est convergente.

b- Soit $x > 0$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x)| \leq e^{-nx}$

c- En déduire que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

2) On pose

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}e^{-nx}$$

a- Soit $a > 0$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \sup_{x\geq a} |f_n(x)| = |f_n(a)|$

b) La série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ est-elle normalement convergente sur $[a, +\infty[$?

c- La fonction F est-elle continue sur $]0, +\infty[$? Justifiez votre réponse.

3) a- Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la dérivée f_n' de la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+$.

b- Soit $a > 0$. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sup_{x\geq a} |f_n'(x)| \leq e^{-na}$$

c- La série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n'(x)$ est-elle normalement convergente sur $[a, +\infty[$?

d- La fonction F est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$? Justifiez votre réponse.

4) a- Développer la fonction $y \mapsto \ln(1 + y)$ en série entière en précisant l'intervalle de validité de ce développement.

b- En déduire que

$$\forall x > 0, F(x) = e^x \ln\left(1 + e^{-x}\right)$$