Emmanuel Hebey
Année 2024-2025

Probabilités
Examen
(Durée 2 heures)

(Le barème est donné à titre indicatif)
(Les notes supérieures à 20 sont ramenées à 20)
(Les documents sont interdits)

Exercice 1: Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace de probabilité fini, $a, b \in [0,1]$ deux réels à déterminer et $X : \Omega \to [\![-3, 3]\!]$ une variable aléatoire dont la loi est donnée par le tableau

k	-3	-2	-1	0	1	2	3
$P_X(k)$	0,1	a	0,1	0,2	b	0,2	$0,1$

où on a noté $P_X(k)$ pour $P(X = k)$.

(1) (1 pt) Quelle relation doivent vérifier a et b pour que les $p_k = P_X(k)$ du tableau correspondent bien à une probabilité sur $[\![-3, 3]\!]$?

(2) (1 pt) Quelle valeur faut-il donner à a et b pour que l'espérance de X soit nulle ?

Dans ce qui suit on fixe a et b tels que trouvés aux questions (1) et (2).

(3) (2 pts) Déterminer la loi de X^2 et calculer la variance de X.

(4) (1 pt) Que vaut la variance de $2X + 3$?

On considère maintenant une autre variable aléatoire $Y : \Omega \to [\![-3, 3]\!]$ dont la loi est donnée par le tableau

k	-3	-2	-1	0	1	2	3
$P_Y(k)$	0,2	0,2	0,1	0,1	0,1	0,2	$0,1$

On suppose que X et Y sont indépendantes.

(5) (2 pts) Que valent l'espérance et la variance de Y ? Que vaut la variance de $X - Y$?

(6) (1 pt) Que vaut la variance de $2X + 3Y$?

Exercice 2: Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace de probabilité fini et $a \in]0, +\infty[$ un réel strictement positif. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ pour lesquelles $\mathbb{E}(X_1) = -1$, $\mathbb{E}(X_2) = 1$, $\mathrm{Var}(X_1) = a$ et $\mathrm{Var}(X_2) = 4$. On pose $Y_1 = X_1 + X_2$ et $Y_2 = X_1 - X_2$.

(1) (2 pts) Calculer, en fonction de a, les quantités $\mathbb{E}(Y_1)$, $\mathbb{E}(Y_2)$, $\mathrm{Var}(Y_1)$, $\mathrm{Var}(Y_2)$, $E(2X_1 + 3X_2)$, $\mathrm{Var}(2X_1 - 3X_2)$ et $\mathrm{Cov}(Y_1, Y_2)$, où $E(Z)$ et $\mathrm{Var}(Z)$ représentent l'espérance et la variance d'une variable aléatoire Z.

(2) (1 pt) Les variables Y_1 et Y_2 sont-elles indépendantes si $a \neq 4$?

Exercice 3: On jette un dé équilibré 900 fois et on note X la variable aléatoire comptant le nombre de fois où le 1 est apparu.

(1) (2 pts) Calculer l'espérance et la variance de X.

(2) (2 pts) Montrer que $P(125 < X < 175) \geq 0,8$.

Exercice 4: Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace de probabilité fini et soit $n \in \mathbb{N}$ un entier. Etant donné $X : \Omega \to \{0, \ldots, n\}$ une variable aléatoire réelle sur cet espace qui prend les valeurs $0, \ldots, n$, on définit la fonction génératrice G_X de X comme étant le polynôme réel G_X donné par

$$G_X(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k x^k$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$, où $p_k = P(X = k)$ pour $k = 0, \ldots, n$. On adopte dans ce qui suit la convention $0^0 = 1$.

(1) (1 pt) Déterminer la fonction génératrice d'une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ de paramètres n et p.

(2) (1 pt) Montrer que deux variables aléatoires $X : \Omega \to \{0, \ldots, n\}$ et $Y : \Omega \to \{0, \ldots, n\}$ suivent la même loi si et seulement si $G_X = G_Y$.

(3) (1 pt) Montrer que $E(X) = G'_X(1)$ et que

$$\mathrm{Var}(X) = G''_X(1) + G'_X(1)\big(1 - G'_X(1)\big) ,$$

où $E(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$ sont l'espérance et la variance de X.

(4) (1 pt) Soient $Z : \Omega \to \{0, \ldots, n\}$ une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$, à valeurs dans $\{0, \ldots, n\}$, et $x \in \mathbb{R}$. Quel lien existe-t-il entre $G_Z(x)$ et $E(x^Z)$ pour $x \in \mathbb{R}$? Vous justifierez votre réponse.

(5) (2 pts) Soient $X : \Omega \to \{0, \ldots, n\}$ et $Y : \Omega \to \{0, \ldots, m\}$ deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$, à valeurs dans $\{0, \ldots, n\}$ pour l'une et $\{0, \ldots, m\}$ pour l'autre. Quelle relation relie G_{X+Y} et $G_X G_Y$? Vous justifierez votre réponse.

(6) (2 pts) Si $X : \Omega \to \{0, \ldots, n\}$ et $Y : \Omega \to \{0, \ldots, m\}$ sont deux variables aléatoires indépendantes qui suivent respectivement les lois binomiales $\mathcal{B}(n, p)$ et $\mathcal{B}(m, p)$ pour un même $p \in]0, 1[$, quelle est la loi de $X + Y$? On répondra en utilisant les fonctions génératrices.

Quelques calculs qui pourraient être utiles, d'autres pas: $9 \times 0,2 = 1,8$; $7 \times 0,3 = 2,1$; $4 \times 0,4 = 1,6$; $5 \times 0,5 = 2,5$; $1,6 + 1,8 = 3,4$; $4 \times 3,6 = 14,4$; $5 \times 3,8 = 19$; $4 \times 3,1 = 12,4$; $0,8 + 0,9 = 1,7$; $1,8 + 1,7 = 3,5$; $0,7 + 0,6 = 1,3$; $(0,3)^2 = 0,09$; $(0,7)^2 = 0,49$; $9 \times 0,3 = 2,7$; $4 \times 0,4 = 1,6$; $9 \times 0,5 = 4,5$; $1,6 + 2,7 = 4,3$; $4,5 - 0,09 = 4,41$; $3,7 + 2,8 = 6,50$; $3,6 + 4,41 = 8,01$; $4 \times 3,6 = 14,4$; $5 \times 0,7 = 3,5$; $9 \times 4,41 = 39,69$; $7 \times 3,75 = 26,25$; $14,4 + 39,69 = 54,09$; $14,4 + 26,25 = 40,65$; $900 = 6 \times 150$; $900 = 3 \times 300$; $150 = 25 \times 6$; $148 = 37 \times 4$; $5 \times 25 = 125$; $150 \times 5 = 750$; $148 \times 7 = 1036$; $750 = 6 \times 125$; $(25)^2 = 625$; $(24)^2 = 576$; $625 = 5 \times 125$; $5 \times 0,2 = 1$.