Emmanuel Hebey
Année 2023-2023

Probabilités
Examen
(Durée 2 heures)

(Le barème est donné à titre indicatif)

(Les notes supérieures à 20 sont ramenées à 20)

(Les documents sont interdits)

Exercice 1: Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace de probabilité fini, $a, b \in [0,1]$ deux réels à déterminer et $X : \Omega \to [\![-3, 3]\!]$ une variable aléatoire dont la loi est donnée par le tableau

k	-3	-2	-1	0	1	2	3
$P_X(k)$	0,15	a	0,10	0,20	b	0,15	$0,15$

où on a noté $P_X(k)$ pour $P(X = k)$.

(1) (1 pt) Quelle valeur faut-il donner à a et b pour que les $p_k = P_X(k)$ du tableau correspondent bien à une probabilité sur $[\![-3, 3]\!]$ et pour que $P(X \leq 0) = 0,6$. ?

(2) (1 pt) Que vaut l'espérance de X ?

(3) (2 pts) Déterminer la loi de X^2.

(4) (1 pt) Que vaut la variance de X ?

(5) (2 pts) Que vaut la variance de $2X^2 + 5$?

Exercice 2: Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace de probabilité fini. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ pour lesquelles $\mathbb{E}(X_1) = -1$, $\mathbb{E}(X_2) = 1$, $\text{Var}(X_1) = 2$ et $\text{Var}(X_2) = 4$. On pose $Y_1 = X_1 + X_2$ et $Y_2 = X_1 - X_2$.

(1) (3 pts) Calculer $\mathbb{E}(Y_1)$, $\mathbb{E}(Y_2)$, $\text{Var}(Y_1)$, $\text{Var}(Y_2)$ et $\text{Cov}(Y_1, Y_2)$.

(2) (1 pt) Les variables Y_1 et Y_2 sont-elles indépendantes ?

Exercice 3: (3 pts) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et soit X_n une suite de variables aléatoires réelles, chacune d'entre elles suivant la loi binomiale de paramètres n et $p_n = \frac{1}{n^3}$. Que valent les limites de $E(nX_n + 1)$ et $\text{Var}(nX_n + 1)$ lorsque $n \to +\infty$?

Exercice 4: Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire au hasard (avec équiprobabilité) une boule dans l'urne, on note le numéro obtenu, puis on remet la boule dans l'urne et on répète l'expérience une fois de plus. On note X_1 et X_2 les variables aléatoires indépendantes correspondant aux numéros obtenus. On note alors $X = \min(X_1, X_2)$ et $Y = \max(X_1, X_2)$.

(1) (1 pt) Dans le cas d'une seule expérience (une seule boule tirée), et si N est la variable aléatoire correspondant au numéro obtenu, que vaut $P(N > k)$ en fonction de n et k pour $k \in [\![1, n]\!]$?

(2) (1 pt) On propose plusieurs formules pour les sommes $\sum_{k=1}^{n} k$ et $\sum_{k=1}^{n} k^2$. Indiquer lesquelles des formules $(1a), (1b), (1c)$ et $(2a), (2b), (2c)$ sont justes.

$$(1a)\ \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(3n+2)}{2}\ ,\ (1b)\ \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}\ ,\ (1c)\ \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{6}\ ,$$

$$(2a)\ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n-1)(2n+1)}{6}\ ,\ (2b)\ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\ ,$$

$$(2c)\ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n-4))(2n+7)}{6}\ .$$

On ne demande pas de justification. Juste les deux références des formules exactes.

(3) (2 pts) On revient aux données de l'exercice. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, calculer les probabilités $P(\{X_1 = k\} \cap \{X_2 = k\})$, $P(\{X_1 = k\} \cap \{X_2 > k\})$ et enfin $P(\{X_1 > k\} \cap \{X_2 = k\})$.

(4) (2 pts) Expliciter la loi de X et calculer $\mathbb{E}(X)$.

(5) (1 pt) Exprimer $X + Y$ en fonction de X_1 et X_2. En déduire $\mathbb{E}(Y)$.

(6) (2 pts) Exprimer XY en fonction de X_1 et X_2. En déduire $\mathrm{Cov}(X, Y)$. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Quelques calculs qui pourraient être utiles, d'autres pas: $2,3 \times 4,7 = 10,81$; $(4,1)^2 = 16,81$; $(3,7)^2 = 13,69$; $16 \times 0,3 = 4,8$; $16 \times 0,6 = 9,6$; $14 \times 0,3 = 4,2$; $(4,7)^2 = 22,09$; $76 \times 0,4 = 30,4$; $81 \times 0,3 = 24,3$; $18 \times 0,5 = 9$; $97 \times 0,3 = 29,1$; $97 \times 0,5 = 48,5$; $29,3 - 16,81 = 12,49$; $67,9 - 54,36 = 13,54$; $4 \times 27,6 = 110,4$; $4 \times 29,3 = 117,2$; $3 \times 16,81 = 50,43$; $4 \times 16,81 = 67,24$; $6 \times 12,24 = 73,44$; $4 \times 11,83 = 47,32$; $4 \times 12,49 = 49,96$; $117,2 - 67,24 = 49,96$; $118,4 - 63,25 = 55,15$.